

1. Considérese un campo gravitatorio correspondiente a una perturbación pequeña sobre la métrica de Minkowski de modo que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Calcúlese el tensor de Riemann a primer orden en  $h_{\mu\nu}$ .  
 Demostrar que este tensor de Riemann linealizado es invariante bajo la transformación  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$  con  $\xi_\mu$  arbitrario.

### Solución propuesta

Veamos qué forma general tiene el tensor de Riemann que nos piden

$$(1) \quad R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\tau\delta} \Gamma^\tau_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\tau\gamma} \Gamma^\tau_{\beta\delta}$$

Como bien observamos, este depende de los símbolos de la conexión por ello escribamos estos también

$$(2) \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

Sustituyendo  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ; entonces

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}] [(\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta})_{,\gamma} + (\eta_{\mu\gamma} + h_{\mu\gamma})_{,\beta} - (\eta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma})_{,\mu}]$$

que podemos escribir como;

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} (h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) + \mathcal{O}(h^2)$$

donde en  $O(h^2)$  consideramos todos los términos que no nos interesan, es decir, aquellos que no son de primer orden en  $h$ .

Fijándonos en el tensor de Riemann que hemos escrito nos damos cuenta que el tercer y cuarto sumando, en los cuales tenemos un producto de símbolos de la conexión, serán de orden mayor al que queremos, con lo que

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + O(h^2)$$

Quedándonos entonces solo con los términos a primer orden tanto en el tensor de Riemann como en los símbolos de la conexión,

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} (\eta_{\mu\beta,\gamma} + \eta_{\mu\gamma,\beta} - \eta_{\beta\gamma,\mu})$$

por lo que;

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} \partial_{\gamma} [ \overset{\textcircled{a}}{\eta_{\nu\beta,\delta}} + \eta_{\nu\delta,\beta} - \eta_{\beta\delta,\nu} ] - \\ - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \partial_{\delta} [ \overset{\textcircled{a}}{\eta_{\mu\beta,\gamma}} + \eta_{\mu\gamma,\beta} - \eta_{\beta\gamma,\mu} ]$$

en los sumandos marcados con  $\textcircled{a}$  observamos que si en el inferior realizamos la redefinición de algunos índices como  $\mu = \nu$  y  $\delta = \gamma$  tenemos lo mismo, por lo que se cancelarán al sumar. Se puede escribir entonces;

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} \partial_{\gamma} [ \eta_{\nu\delta,\beta} - \eta_{\beta\delta,\nu} ] - \\ - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \partial_{\delta} [ \eta_{\mu\gamma,\beta} - \eta_{\beta\gamma,\mu} ]$$

A primer orden en  $h$  tenemos

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\nu} \left( 2\gamma(h_{\nu\delta,\beta} - h_{\beta\delta,\nu}) - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\lambda} \partial_\lambda (h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}) \right)$$

También podemos expresarlo tal que;

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 2\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \quad \text{donde sino eliminamos}$$

los sumandos idénticos podemos escribir así.

Veamos, partiendo de esta última expresión a primer orden en  $h$ ,  
que la transformación propuesta deja invariante el tensor  
de Riemann a primer orden en  $h$ :

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\nu} \left( \partial_\gamma (h_{\nu\beta} + \partial_\nu \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\nu)_{,\delta} + \partial_\gamma (h_{\nu\delta} + \partial_\nu \epsilon_\delta + \partial_\delta \epsilon_\nu)_{,\beta} - \right. \\ \left. - \partial_\gamma (h_{\beta\delta} + \partial_\beta \epsilon_\delta + \partial_\delta \epsilon_\beta)_{,\nu} \right) - \\ - \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} \left( \partial_\delta (h_{\mu\beta} + \partial_\mu \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\mu)_{,\gamma} + \partial_\delta (h_{\mu\gamma} + \partial_\mu \epsilon_\gamma + \partial_\gamma \epsilon_\mu)_{,\beta} - \right. \\ \left. - \partial_\delta (h_{\beta\gamma} + \partial_\beta \epsilon_\gamma + \partial_\gamma \epsilon_\beta)_{,\mu} \right)$$

desarrollando,

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\nu} \left[ \begin{array}{l} \partial_\gamma \partial_\delta h_{\nu\beta} + \partial_\gamma \partial_\delta \partial_\nu \epsilon_\beta + \partial_\gamma \partial_\delta \partial_\beta \epsilon_\nu \\ + \partial_\gamma \partial_\beta h_{\nu\delta} \\ - \partial_\gamma \partial_\nu h_{\beta\delta} \end{array} \right] + \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\nu} \left[ \begin{array}{l} \partial_\gamma \partial_\beta \partial_\nu \epsilon_\delta + \partial_\gamma \partial_\beta \partial_\delta \epsilon_\nu \\ - \partial_\gamma \partial_\nu \partial_\beta \epsilon_\delta - \partial_\gamma \partial_\nu \partial_\delta \epsilon_\beta \end{array} \right] \\ - \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} \left[ \begin{array}{l} \partial_\delta \partial_\gamma h_{\mu\beta} + \partial_\delta \partial_\gamma \partial_\mu \epsilon_\beta + \partial_\delta \partial_\gamma \partial_\beta \epsilon_\mu \\ + \partial_\delta \partial_\beta h_{\mu\gamma} \\ - \partial_\delta \partial_\mu h_{\beta\gamma} \end{array} \right] + \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} \left[ \begin{array}{l} \partial_\delta \partial_\beta \partial_\mu \epsilon_\gamma + \partial_\delta \partial_\beta \partial_\gamma \epsilon_\mu \\ - \partial_\delta \partial_\mu \partial_\beta \epsilon_\gamma - \partial_\delta \partial_\mu \partial_\gamma \epsilon_\beta \end{array} \right]$$

teniendo en cuenta que podemos conmutar derivadas y los ~~los~~ fijándonos en los índices de los términos recuadrados podemos cancelarlos por pares, así se nos queda solo lo que sigue:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\lambda} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} [ 2\gamma_{\beta\mu}\gamma_{\gamma\lambda} - 2\gamma_{\beta\lambda}\gamma_{\gamma\mu} ] \\ - \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\mu} [ 2\gamma_{\beta\mu}\gamma_{\gamma\lambda} - 2\gamma_{\beta\lambda}\gamma_{\gamma\mu} ]$$

que es lo mismo que habíamos obtenido inicialmente. Como lo que queda visto que la transformación deja invariante el tensor de Riemann linealizado.

2. Sea la métrica de FLRW tal que

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

$$\rho = \frac{2r}{1 + \sqrt{1-kr^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

considerando el cambio de variable

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

queremos llegar a

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{kp^2}{4})^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

la métrica de FLRW en coordenadas rectangulares.

Para ello, partamos con el cálculo de los elementos de la métrica en coordenadas rectangulares y veamos que llegamos a la métrica en esféricas. No mostraré todos los cálculos para no alargarnos, pues estos son solo cálculos sin mayor dificultad. El cambio de transformación se puede escribir como, para los diferenciales,  $dx, dy, dz$ :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

Tomando cada uno de los diferenciales y volviendo a diferenciales obtenemos:

$$dx^2 = \sin^2\theta \cos^2\phi d\phi^2 + r^2 \cos^2\theta \cos^2\phi d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi d\phi^2$$

$$dy^2 = \sin^2\theta \sin^2\phi d\phi^2 + r^2 \cos^2\theta \sin^2\phi d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi d\phi^2$$

$$dz^2 = \cos^2\theta dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\theta^2$$

por lo que, sumando, se llega a:

$$\boxed{dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2}$$

Nos queda entonces por obtener,  $dr^2$ ,  $r^2$  y finalmente el valor de  $\frac{1}{(1 + \frac{kr^2}{4})^2}$ :

$$\varphi = \frac{2r}{1 + \sqrt{1 - kr^2}} \rightarrow r^2 = \frac{4r^2}{(1 + \sqrt{1 - kr^2})^2}$$

$$dr = \frac{2(1 + \sqrt{1 - kr^2}) + \frac{2kr^2}{\sqrt{1 - kr^2}}}{(1 + \sqrt{1 - kr^2})^2} dr = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - kr^2})(1 - kr^2)} dr$$

$$dr^2 = \frac{4}{(1 + \sqrt{1 - kr^2})^2 (1 - kr^2)^2} dr^2$$

Ahora solo nos queda introducir todo en la métrica en coordenadas rectangulares:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

por lo que, sustituyendo todo se llega a:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{\left(1 + \sqrt{1 - kr^2}\right)^2} \left( \frac{4dr^2}{\left(1 + \sqrt{1 - kr^2}\right)^2 (1 - kr^2)} + \frac{4r^2}{\left(1 + \sqrt{1 - kr^2}\right)^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)}$$

que es exactamente lo que esperábamos encontrar.

Dada una variedad diferenciable podemos definir sobre ella un álgebra de Lie. Esta, consiste en esencia, es un conjunto de campos vectoriales que cumplen la propiedad de ser cerrados bajo el corchete de Lie, es decir, siendo  $\vec{L}_i$  y  $\vec{L}_j$  campos vectoriales definidos sobre la variedad,  $[\vec{L}_i, \vec{L}_j] \in L \subseteq M$ , donde  $L$  se supone como un subconjunto de campos vectoriales definidos en una variedad diferenciable  $M$ .

Se debe de cumplir los puntos que siguen:

- $L$  es un subconjunto del espacio de campos vectoriales sobre  $M$ .
- Si  $L_1, L_2 \in L \rightarrow [L_1, L_2] \in L$
- El corchete de Lie debe de ser lineal, antisimétrico y debe cumplir la identidad de Jacobi.

Estos puntos serán los que comprobemos. De nuevo, no pondremos de forma explícita todos los cálculos por su dificultad se queda sólo en eso, en cálculos;

$$[\vec{L}_1, \vec{L}_2] = [y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z] = (y\partial_z - z\partial_y)(z\partial_x - x\partial_z) - (z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y) = -\vec{L}_3 \in L$$

$$[\vec{L}_1, \vec{L}_3] = [y\partial_z - z\partial_y, -y\partial_x + x\partial_y] = (y\partial_z - z\partial_y)(-y\partial_x + x\partial_y) - (-y\partial_x + x\partial_y)(y\partial_z - z\partial_y) = \vec{L}_2 \in L$$

$$[\vec{L}_2, \vec{L}_3] = [z\partial_x - x\partial_z, x\partial_y - y\partial_x] = (z\partial_x - x\partial_z)(x\partial_y - y\partial_x) - (x\partial_y - y\partial_x)(z\partial_x - x\partial_z) = -\vec{L}_1 \in L$$

el subespacio  $L \subseteq M$  se define como

$$L \equiv \text{span} \{ \vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3 \}$$

el cual es un subconjunto de los campos vectoriales de la variedad  $M$ .

Como vemos, el corchete de Lie es cerrado. La propiedad de linealidad, Jacobi y antisimetría se demuestran con facilidad teniendo en cuenta, suponiendo condiciones de continuidad y diferenciabilidad, el segundo teorema de Schwartz para la conmutatividad de las derivadas parciales segundas. Además, el corchete de Lie, en esencia, se reduce a ~~productos y sumas~~ operar con "." y "+", operación de suma y producto usuales, de las cuales tenemos conmutatividad en  $\mathbb{R}$ , y en general, en  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

Existen direcciones sobre una variedad en las que la métrica definida, localmente, no cambia, es decir, definida una curva sobre la variedad diferenciable si al movernos sobre ella, nuestra métrica se mantiene invariante habríamos encontrado una dirección sobre la variedad que nos proporciona lo mencionado.

Por ejemplo, definido el espacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$   $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$  y definiendo  $e_0 = (1,0,0)$   $e_1 = (0,1,0)$  ( ~~$e_2 = (0,0,1)$~~ ). Para cada punto podemos definir, localmente, los términos de la

Primera Forma Fundamental / métrica:  $\boxed{\{(1,0,0); (0,1,0)\} \equiv OXY}$

$$g_{00} = e_0 \cdot e_0 = 1 \quad g_{11} = e_1 \cdot e_1 = 1 \quad (\text{g}_{22} = 1)$$

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Como todos los elementos de la métrica son constantes, como bien ocurre en los espacios planos, tendremos que todas las direcciones son de Killing pues la métrica no cambiará cuando nos movamos en cualquiera de las direcciones.

Como hemos comentado ya, existen direcciones que nos dejan el elemento de línea, métrica, invariante.

Dados los campos vectoriales  $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$  podemos intuir de forma "genérica" que dejan la métrica invariante pues estos representan rotaciones en  $\mathbb{R}^{3+1}$ , en este caso,  $SO(3,1)$ . Podemos definir una isometría (se conservan distancias y ángulos).

Para comprobar que  $\bar{K}_1 = \frac{Kx^2}{2} \partial_x + \frac{Ky^2}{2} \partial_y + \left(1 - \frac{Kx^2}{4} + \frac{Ky^2}{2}\right) \partial_z$ , es de Killing para la métrica, vamos a hallar los símbolos de la conexión, no todos, sino aquellos que nos hacen falta para comprobar la ecuación de Killing  $\nabla_\mu K^\nu + \nabla_\nu K^\mu = \nabla_\mu (g^{\mu\nu} K^\nu) + \nabla_\nu (g^{\mu\mu} K^\mu) = 0$ :

$\uparrow$   
 $\nabla_i (g_{ij}) = 0$

Los elementos de la <sup>conexión</sup> ~~métrica~~ son:  $\gamma(t) = \left(\frac{4+Kx^2}{4}\right)^2$

$$g_{00} = -4 ; g_{ii} = \frac{a^2(t)}{\gamma^2(p)} = \frac{a^2(t)}{\gamma^2(x,y,t)} \quad \forall i \neq 0, i \in \{1,2,3\}$$

se da por entendido que :  $\boxed{0 \rightarrow t \quad 1 \rightarrow x \quad 2 \rightarrow y \quad 3 \rightarrow z}$

$$\boxed{2_t(a^2(t)) = 2a(t)a'(t)}$$

$\gamma^2 = \frac{4+K(x^2+y^2+t^2)}{4}$

$$2_i\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) = -2 \frac{1}{\gamma} \gamma'_i$$

$$\gamma'_i = \frac{2Ki}{4} = \frac{Ki}{2}$$

$$\boxed{2_i\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) = -2 \frac{Ki}{2\gamma} = -\frac{Ki}{\gamma}}$$

para los elementos de la conexión, haciéndonos de las derivadas anteriores:

Dada la base:  $e_0 \cdot e_0 = g_{00}$   $e_1 e_1 = g_{11}$   $e_1 e_2 = g_{21}$   $e_3 e_3 = g_{33}$   
 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$   $e_i e_j = 0 \quad \forall i \neq j$

entonces; se procede de forma general de la forma:

$$\partial_i (e_j e_k) = \partial_i (g_{jk})$$

$$(\partial_i e_j) e_k + e_j (\partial_i e_k) = \partial_i (g_{jk})$$

en el caso particular de  $j=k=i=0 \rightarrow t$  entonces;

$$(\partial_0 e_0) e_0 + e_0 (\partial_0 e_0) = \partial_0 (g_{00}) = 0$$

$$2(\partial_0 e_0) e_0 = 0$$

$$(\partial_0 e_0) e_0 = 0$$

$$(\Gamma_{00}^0 e_0 + \Gamma_{00}^1 e_1 + \Gamma_{00}^2 e_2 + \Gamma_{00}^3 e_3) e_0 = 0$$

$$\Gamma_{00}^0 e_0 \cdot e_0 = 0$$

$$\Gamma_{00}^0 (-1) = 0 \rightarrow \boxed{\Gamma_{00}^0 = 0}$$

para todos los demás se procede de forma análoga y estos

son:

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = -\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{33}^1 = -\frac{k_x}{2\gamma} \\ \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = -\Gamma_{33}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -\frac{k_y}{2\gamma} \\ \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = -\Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = -\frac{k_z}{2\gamma} \end{array} \right.$$

obtenemos, previamente, algunas derivadas del campo vectorial  $\bar{K}_1$ :

$$2_1 K_1 = \frac{K_z}{2} ; 2_1 K_3 = -\frac{K_x}{2} ; 2_2 K_2 = \frac{K_z}{2} ; 2_2 K_3 = -\frac{K_y}{2} ; 2_3 K_1 = \frac{K_x}{2}$$

$$2_3 K_2 = \frac{K_y}{2} ; 2_3 K_3 = \frac{K_z}{2}$$

cualquier otra posibilidad es nula.

Por tanto, planteemos la ecuación de Killing  $\nabla_\mu K^\nu + \nabla_\nu K^\mu = 0$ ;

Las componentes temporales tanto para los símbolos de la conexión como para el cálculo que vamos a realizar ahora puesto que ni existen, en  $K_1$ , es decir, su valor es nulo, mejor dicho, no las pondremos;

$$\nabla_1 K^2 = 2_1 K^2 + \Gamma_{11}^2 K^1 + \Gamma_{21}^1 K^2 + \Gamma_{31}^3 K^3 = \frac{K_y}{2\gamma} \frac{K_{xz}}{2} - \frac{K_x}{2\gamma} \frac{K_{yz}}{2}$$

$$\nabla_2 K^1 = 2_2 K^1 + \Gamma_{12}^1 K^1 + \Gamma_{22}^1 K^2 + \Gamma_{32}^3 K^3 = -\frac{K_y}{2\gamma} \frac{K_{xz}}{2} + \frac{K_x}{2\gamma} \frac{K_{yz}}{2}$$

$$\boxed{\nabla_1 K^2 + \nabla_2 K^1 = 0} \checkmark$$

$$\nabla_1 K^3 = 2_1 K^3 + \Gamma_{11}^3 K^1 + \Gamma_{21}^3 K^2 + \Gamma_{31}^3 K^3 = -\frac{K_x}{2} + \frac{K_z}{2\gamma} \frac{K_{xz}}{2} - \frac{K_x}{2\gamma} \left(1 - \frac{K_{yz}^2}{4} + \frac{K_{xz}^2}{2}\right)$$

$$\nabla_3 K^1 = 2_3 K^1 + \Gamma_{13}^1 K^1 + \Gamma_{23}^1 K^2 + \Gamma_{33}^1 K^3 = \frac{K_x}{2} - \frac{K_z}{2\gamma} \frac{K_{xz}}{2} + \frac{K_x}{2\gamma} \left(1 - \frac{K_{yz}^2}{4} + \frac{K_{xz}^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\nabla_1 K^3 + \nabla_3 K^1 = 0} \checkmark$$

por último,

$$\nabla_2 K^3 = 2_2 K^3 + \Gamma_{12}^3 K^1 + \Gamma_{22}^3 K^2 + \Gamma_{32}^3 K^3 = -\frac{K_y}{2} + \frac{K_z}{2\gamma} \frac{K_{yz}}{2} - \frac{K_y}{2\gamma} \left(1 - \frac{K_{yz}^2}{4} + \frac{K_{xz}^2}{2}\right)$$

$$\nabla_3 K^2 = 2_3 K^2 + \Gamma_{13}^2 K^1 + \Gamma_{23}^2 K^2 + \Gamma_{33}^2 K^3 = \frac{K_y}{2} - \frac{K_z}{2\gamma} \frac{K_{yz}}{2} + \frac{K_y}{2\gamma} \left(1 - \frac{K_{yz}^2}{4} + \frac{K_{xz}^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\nabla_2 K^3 + \nabla_3 K^2 = 0} \checkmark$$

queda demostrado que  $\bar{K}_1$  es un Killing de la métrica de FLRW.

Finalmente, podemos obtener otros Killing realizando el conmutador de dos de ellos, esto nos devolverá otro Killing. Con ello, considerando  $L_1, L_2$  -

$$[K_1, L_1] = V_1 = \left( \frac{K_{xz}}{2} \partial_x + \frac{K_{yt}}{2} \partial_y + \left(1 - \frac{K_{\varphi^2}}{4} + \frac{K_{zt}}{2}\right) \partial_z \right) (y \partial_z - z \partial_y) \\ - (y \partial_z - z \partial_y) \left( \frac{K_{xz}}{2} \partial_x + \frac{K_{yt}}{2} \partial_y + \left(1 - \frac{K_{\varphi^2}}{4} + \frac{K_{zt}}{2}\right) \partial_z \right)$$

$$\boxed{[K_1, L_1] = V_1 = -\frac{K_{xy}}{2} \partial_x + \left(-1 + \frac{K_{\varphi^2}}{4} - \frac{K_{yt}}{2}\right) \partial_y - \frac{K_{yt}}{2} \partial_z = V_1}$$

$$[K_1, L_2] = \left( \frac{K_{xz}}{2} \partial_x + \frac{K_{yt}}{2} \partial_y + \left(1 - \frac{K_{\varphi^2}}{4} + \frac{K_{zt}}{2}\right) \partial_z \right) (z \partial_x - x \partial_z) \\ - (z \partial_x - x \partial_z) \left( \frac{K_{xz}}{2} \partial_x + \frac{K_{yt}}{2} \partial_y + \left(1 - \frac{K_{\varphi^2}}{4} + \frac{K_{zt}}{2}\right) \partial_z \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{[K_1, L_2] = \frac{K_{yx}}{2} \partial_y + \frac{K_{zx}}{2} \partial_z + \left(1 - \frac{K_{\varphi^2}}{4} + \frac{K_{xz}}{2}\right) \partial_x = W_2}$$

para  $\underline{k=0} \rightarrow \boxed{K_1 = \partial_z, V_1 = -\partial_y, W_2 = \partial_x}$