

ENTREGA 1 - Experimento de Eötvös.

Ruiz Muñoz, Juan Manuel - GRAVITACIÓN

10 de marzo de 2023 - Universidad de Salamanca

De forma irremediable nos criamos en una realidad en la que nuestro cerebro nos hace aceptar como cierto que al dejar caer dos objetos desde la misma altura, uno de mayor masa que otro, $m_1 < m_2$, el de mayor masa alcanzará el suelo en un tiempo menor, que el de menor masa. Esta idea, no solo está arraigada en los niños sino que, por desgracia, es una idea que gran parte de la población tiene en su cabeza. Solo bastaría realizar un estudio inferencial sobre la población para comprobarlo.

Y esto no es culpa de ellos, ni mucho menos, sino que a pesar de ser algo erróneo, no es tan intuitivo como parece. Estamos acostumbrados a observar que si dejamos caer objetos que no tienen un peso excesivo, como lo pueden ser una bolsa, una pluma de paloma entre otras, éstas suelen demorarse en aterrizar en el suelo. El efecto aún se acentúa mucho más si observamos estos objetos caer junto a objetos algo más pesados como podría ser una pelota de fútbol, por ejemplo. La pelota de fútbol llegará al suelo mucho antes que una hoja de papel, ya que $m_{\text{pelota}} \gg m_{\text{papel}}$.

Algún fiel de esta idea te podría decir que si ocurre en nuestro día a día, pues será verdad, que esto se da debido a que la masa de uno es mayor que la del otro, y la verdad es que no le faltará razón. Yo como seguidor del método científico no le reprocharé que defienda su postura, será mi deber intentar derrumbar sus argumentos. Y es que si tuviera razón, esto debería de ocurrir siempre que tengamos dos objetos con diferentes masas $m_1 < m_2$.

Bien, aquí no me será posible, por tiempo principalmente, realizar un estudio empírico del problema, pero es algo que se puede acudir a internet y se observarán cientos, sino miles, de demostraciones en vídeo donde se desmonta esta idea. Y es que si suponemos que dejamos caer dos objetos desde la misma altura estos alcanzarán el suelo **AL MISMO TIEMPO!**

Lo podemos comprobar en una cámara de vacío o incluso en la misma calle. Solo tenemos que colocar una pluma sobre, por ejemplo, un paquete de folios, que obviamente será más pesado. Estos caerán a la vez.

En la vida cotidiana observamos que una hoja de papel cae más lento que una piedra ya que cada una se ve afectada de forma diferente al interactuar con el

aire a la hora de caer, no tienen la misma aerodinámica.

Es aquí, partiendo de lo anterior, donde debemos de hacernos la pregunta **¿esto a qué se debe?**

Hemos de notar que tenemos dos tipos diferentes de masa, una que nos indica cómo de 'complicado' le resulta a un cuerpo modificar su estado de movimiento, o con otras palabras, la resistencia que ofrece un cuerpo a cambios en su velocidad. Esta masa la llamaremos **masa inercial** y la denotaremos como m_i .

Por otro lado, tenemos una masa que nos indica cómo van a interactuar gravitacionalmente los cuerpos con masa. A esta masa la llamaremos **masa gravitacional** y la denotaremos como m_g .

La primera de ellas la podemos encontrar en la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m_i \vec{a},$$

mientras que la gravitacional la encontramos en la ley de gravitación universal,

$$\vec{F}_g = G \frac{m_g M}{r^2} (-\hat{u}_r).$$

La diferencia entre las dos puede ser algo difusa para alguien a quien se le acaban de definir pero pongamos un ejemplo, que a mi parecer es bastante esclarecedor.

Pongamos que tenemos un muelle enganchado de un techo sobre el cual colocamos una masa.

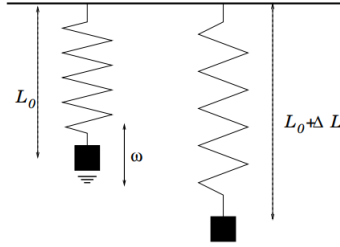


Figura 1: Esquema de la masa colgada del muelle. En la izquierda se esquematiza la frecuencia con la que oscila la masa (inercial), ω , mientras que en la derecha se muestra la elongación que sufre el muelle respecto de su punto de equilibrio L_0 debido a la masa (gravitacional).

En este sistema, podemos medir el sistema mientras oscila (m.a.s) que tendrá unas ecuaciones de movimiento $kz = m_i \ddot{z}$, donde k la suponemos como la constante de elasticidad del muelle y z la posición sobre el eje OZ que oscila. La frecuencia con la que oscilará mientras tenemos movimiento será entonces $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_i}}$ donde podemos observar que la masa que interviene es la inercial.

Por otro lado, supongamos equilibrio en el sistema, debido a la masa colgada tendremos que el muelle se estirará. El equilibrio se dará cuando la fuerza de Hooke sea la misma que la gravitatoria,

$$k\Delta z = k\Delta L = m_g g.$$

Hemos escrito Δz como la variación en el eje OZ que para seguir con el esquema de la Figura 1 hemos escrito como $\Delta z = \Delta L$.

De este sistema podemos medir experimentalmente las dos masas. Por un lado la inercial con la frecuencia de oscilación w y luego, la gravitacional con la elongación ΔL y con la constante de elasticidad k , considerando una gravedad $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ($\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0$ para las variaciones que vamos a tener).

Supongamos ahora una masa en caída libre, con masa inercial m_i y masa gravitacional m_g . Las ecuaciones que describen el movimiento del sistema las podemos escribir con ayuda de la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m_i \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (\hat{u}_z) = m_i \ddot{z} (\hat{u}_z),$$

donde suponemos la caída en el eje OZ .

Dicha fuerza será igual a la 'inducida' por la acción de la gravedad terrestre g ,

$$\vec{F}_g = m_g g (-\hat{u}_z) = m_i \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (\hat{u}_z) = \vec{F}.$$

Obtenemos así, una ecuación ordinaria de tipo *separación de variables* que se resuelve de manera casi trivial,

$$-m_g g = m_i \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Resolviéndola en pasos;

$$\begin{aligned} -\frac{m_g}{m_i} g t + cte_1 &= \frac{\partial z}{\partial t}, \\ -\frac{m_g g t^2}{2m_i} + cte_1 t + cte_2 &= z(t), \end{aligned}$$

que dando valores iniciales (z_0, t_0) podemos escribir,

$$z(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_g}{m_i} g t^2 + v_0 t + z_0.$$

Si ahora ligamos la última ecuación para $z(t) = 0$ podemos obtener el tiempo que demorará un objeto en viajar, en caída libre, desde una altura z_0 al suelo $z(t) = 0$. Veamos lo que ocurre,

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{m_g}{m_i} g t^2 + v_0 t + z_0.$$

Obtenemos como soluciones para el tiempo,

$$t = \frac{2v_0 \pm \sqrt{2v_0 + 2z_0 f(m_i, m_g)}}{f(m_i, m_g)},$$

donde hemos definido la relación entre m_g y m_i como $f(m_i, m_g) = 2 \frac{m_g}{m_i} g$.

Si suponemos que ambas masas son diferentes, $f = f(m_i, m_g)$ será característico para cada cuerpo. Siendo esto así, el tiempo t , que es el empleado por un cuerpo en caída libre en llegar al suelo desde una altura z_0 con velocidad inicial v_0 , será diferente para dos cuerpos que se dejan caer partiendo ambos en condiciones iniciales idénticas (z_0, v_0) . ESTO VA EN CONTRA DE LO QUE SE OBSERVA EXPERIMENTALMENTE.

Puesto que se observa que TODOS los cuerpos caen en el mismo tiempo al suelo, sujetos a las mismas condiciones iniciales, debemos de asumir, e intuimos una relación entre las masas, que $f(m_i, m_g) = \text{constante}$. En las unidades apropiadas $\frac{m_g}{m_i} = 1$.

Vemos que desde los formalismos matemáticos nos es complicado intuir la relación entre ambas, pues en principio respetamos, aplicando las ecuaciones del movimiento, los axiomas matemáticos. Es bajo la experiencia, donde notamos que para que las ecuaciones tengan sentido físico, y describan bien la realidad, es necesario que las masas sean iguales, $m_i = m_g$.

Son varios los experimentos que se han llevado a cabo para comprobar experimentalmente esta equivalencia.

Researcher	Year	Method	Average sensitivity
John Philoponus	517 AD	Drop Tower	"small"
Simon Stevin	1585	Drop Tower	5×10^{-2}
Galileo Galilei	1590?	Pendulum, Drop Tower	2×10^{-2}
Isaac Newton	1686	Pendulum	1×10^{-3}
Friedrich Wilhelm Bessel	1832	Pendulum	2×10^{-5}
Southerns	1910	Pendulum	5×10^{-6}
Zeeman	1918	Torsion balance	3×10^{-8}
Loránd Eötvös	1922	Torsion balance	5×10^{-9}
Potter	1923	Pendulum	3×10^{-6}
Renner	1935	Torsion balance	2×10^{-9}
Dicke, Roll, Krotkov	1964	Torsion balance	3×10^{-11}
Braginsky, Panov	1972	Torsion balance	1×10^{-12}
Shapiro	1976	Lunar Laser Ranging	1×10^{-12}
Keiser, Faller	1981	Fluid support	4×10^{-11}
Niebauer, et al.	1987	Drop Tower	1×10^{-10}
Heckel, et al.	1989	Torsion balance	1×10^{-11}
Adelberger, et al.	1990	Torsion balance	1×10^{-12}
Baeßler, et al. ^[15]	1999	Torsion balance	5×10^{-13}
Adelberger, et al. ^[16]	2006	Torsion balance	1×10^{-13}
Adelberger, et al. ^[17]	2008	Torsion balance	3×10^{-14}
MICROSCOPE ^[18]	2017	Satellite orbit	1×10^{-15}

Tabla 1: *Tabla en la que se muestran algunos de los experimentos que se han realizado, para demostrar la equivalencia, a lo largo de la historia. En la primera columna (**Researcher**) se muestra la persona que lo realizó, en la segunda columna (**Year**) el año, en la tercera, (**Method**) el tipo de experimento con el que se comprobó y por último, en la cuarta, (**Average sensitivity**) la precisión con la que se consiguió.*

Nosotros nos centraremos en el experimento que realizó en 1922 Loránd Eötvös haciendo uso de una balanza de torsión.

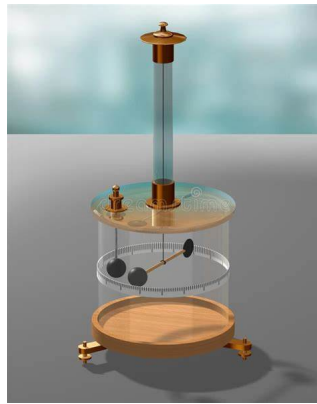


Figura 2: Ilustración de una balanza de torsión.

Antes de comenzar a describir todo el formalismo matemático del experimento,

dediquemos unos segundos a describir el aparato.

Una balanza de torsión consiste, en esencia y a grandes rasgos, en un hilo del cual se cuelga una barra en la que se disponen dos masas en los '*extremos*'. Al sistema se le suele adjuntar un espejo con el que se obtiene mayor precisión a la hora de medir las pequeñas perturbaciones que se puedan dar en el equilibrio. A este espejo se le dirige un rayo de luz, podría ser un láser, al reflejarse podemos medir si este se desplaza.

Lo que hizo Eötvös fue colocar una de las masas sobre uno de los extremos de la varilla, tendida horizontalmente de un hilo (del cual conocemos su composición y parámetros como su módulo de torsión). La otra masa fue colocada en el otro extremo, colgada a su vez de otro hilo. En ambos extremos colocamos las mismas masas gravitacionales, solo que hay que tener en cuenta que el hilo del que penderá una de las masas tendrá masa no despreciable y habrá que corregir esto con la masa del cuerpo que colguemos de él.

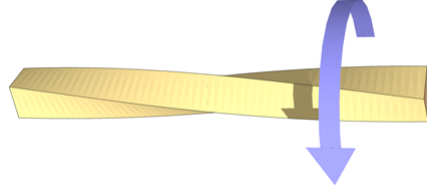


Figura 3: *Ilustración de la torsión del hilo que sujeta la varilla horizontal. Realmente en el sistema real el hilo se coloca girado noventa grados, de forma vertical. Hemos dispuesto así la ilustración por optimización del espacio.*

Añadir por último, que para aumentar la sensibilidad del experimento lo que se hace es el aumentar la distancia vertical entre las masas que se colocan en cada extremo, es decir, el hilo del cual cuelga una de las masas lo variamos en longitud. Mientras que para medir la equivalencia entre masa inercial y gravitacional lo que se hace es lo contrario evitando los posibles gradientes del campo gravitatorio.

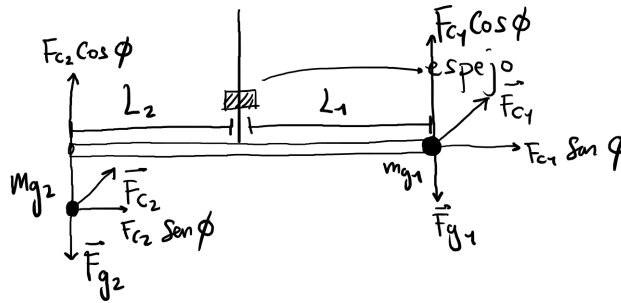


Figura 4: *Esquema del sistema. Se representan las masas, las distancias*

respecto del punto donde se cuelga la varilla y las fuerzas que actúan.

Describir el sistema con palabras es algo complicado, así que espero que la pequeña descripción que he realizado junto a las figuras adjuntadas sean suficientes para que el lector se haga una idea del sistema que vamos a estudiar.

El objetivo de este experimento es intentar medir movimientos en la dirección horizontal del sistema, es decir, el sistema tendrá libertad de moverse en cualquier dirección del espacio pues en principio no tenemos restricciones que lo eviten. Será la condición de equilibrio la que nos dará un movimiento nulo en la dirección vertical. Será deber de nuestra parte estudiar qué ocurre con el movimiento en la dirección horizontal en función de las masas inerciales y gravitacionales.

Para intentar entender mejor esto, imaginemos un sistema de referencia en tres dimensiones, en este caso cartesiano. El eje vertical, respecto de la superficie de la Tierra, será el OZ , y tomaremos el plano OXY como tangente a la superficie, siendo OZ , normal a dicho plano (por si siguiera habiendo dudas).

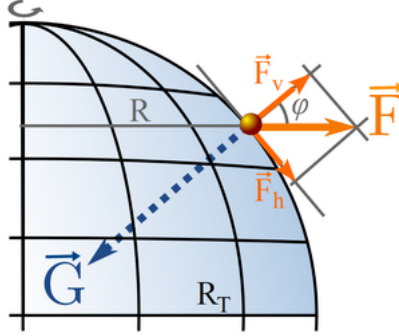


Figura 5: Esquema de cómo descomponemos las fuerzas respecto al sistema de referencia descrito. Este sistema se mueve con la Tierra, con lo que se trata de un sistema de referencia no inercial.

Bien, después de todo esto, planteemos con un formalismo matemático lo que hemos estado plasmando en las figuras. Utilizaremos al sistema Tierra como referencia, es este un sistema de referencia no inercial pues en él nos aparecerán fuerzas ficticias (o no reales, como se prefiera llamarlas). La Tierra gira con una velocidad angular w , este giro deberemos expresarlo en nuestras ecuaciones como una fuerza ficticia, normalmente, llamada fuerza centrífuga pues para nosotros, desde dentro del sistema Tierra, ésta no gira.

Llegados aquí, sobre las masas actúan tanto las fuerzas gravitacionales $\vec{F}_{g1} = F_{g1}(-\hat{u}_z)$, $\vec{F}_{g2} = F_{g2}(-\hat{u}_z)$, ambas reales, como las fuerzas centrífugas $\vec{F}_{c1} = F_{c1}(\hat{u}_h + \hat{u}_z)$, $\vec{F}_{c2} = F_{c2}(\hat{u}_h + \hat{u}_z)$ ambas ficticias y donde tendremos una componente en la dirección vertical \hat{u}_z y otra en la horizontal \hat{u}_h . Esta última se

encontrará contenida en el plano tangente OXY .

Para el análisis de las fuerzas en la vertical sabemos de partida que tendremos equilibrio pues construiremos el sistema, con parámetros $(L_1, L_2, m_{g1}, m_{g2}, \Delta h)$, de tal manera que ocurra el equilibrio mecánico. El parámetro Δh lo defino como la diferencia de altura entre una masa y la otra, o lo que es la mismo, la longitud del hilo del cuál pende la masa 2, según el esquema de la Figura 4.

$$\begin{aligned} \text{MASA 1:} \quad F_{g1} &= G \frac{m_{g1} M_T}{R_T^2} & F_{c1v} &= m_{i1} \frac{v^2}{R} = m_{i1} w^2 R_T \cos(\Phi) \\ \text{MASA 2:} \quad F_{g2} &= G \frac{m_{g2} M_T}{R_T^2} & F_{c2v} &= m_{i2} \frac{v^2}{R} = m_{i2} w^2 R_T \cos(\Phi) \end{aligned}$$

Las fuerzas centrífugas se han descompuesto para una latitud arbitraria, Φ . El radio para la componente vertical, como hemos escrito antes, se escribe para cada una de las masas $R = R_T \cos(\Phi)$.

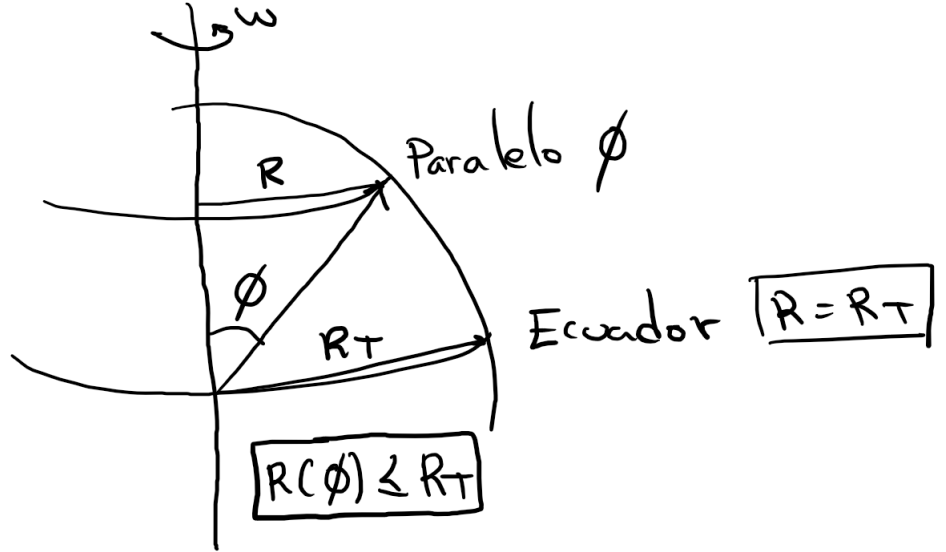


Figura 6: Ilustración de la descomposición del radio a una latitud Φ .

Como tenemos equilibrio mecánico en la vertical se da que los momentos de fuerza son iguales, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ y por ende,

$$L_1 (F_{g1} - F_{c1v}) = L_2 (F_{g2} - F_{c2v}).$$

Puesto que tenemos equilibrio en la vertical tendremos equilibrio en la horizontal solo si se da la equivalencia entre masa inercial y gravitacional pues sólo así

tendremos que el momento de fuerzas aquí será nulo, $\vec{\tau} = L_1 m_{i1} w^2 R_T \text{Sen}(\Phi) - L_2 m_{i2} w^2 R_T \text{Sen}(\Phi) = \vec{0}$. En tal caso, se llega sin mayor complicación que la de

despejar a $\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_{i2}}{m_{i1}}}$.

Del equilibrio de la vertical tenemos,

$$L_1 [m_{g1}g - m_{i1}w^2 R_T \text{Cos}(\Phi)] = L_2 [m_{g2}g - m_{i2}w^2 R_T \text{Cos}(\Phi)],$$

donde hemos escrito $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$.

Dividiendo todo por la masa inercial m_{i1} ,

$$L_1 \left[\frac{m_{g1}}{m_{i1}}g - w^2 R_T \text{Cos}(\Phi) \right] = L_2 \left[\frac{m_{g2}}{m_{i1}}g - \frac{m_{i2}}{m_{i1}}w^2 R_T \text{Cos}(\Phi) \right],$$

y desarrollando los paréntesis,

$$L_1 \frac{m_{g1}}{m_{i1}}g - L_1 w^2 R_T \text{Cos}(\Phi) = L_2 \frac{m_{g2}}{m_{i1}}g - L_2 \frac{m_{i2}}{m_{i1}}w^2 R_T \text{Cos}(\Phi).$$

Haciendo uso de que $\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_{i2}}{m_{i1}}}$ podemos escribir,

$$L_1 \frac{m_{g1}}{m_{i1}}g - L_1 w^2 R_T \text{Cos}(\Phi) = L_2 \frac{m_{g2}}{m_{i1}}g - \cancel{L_2 \frac{m_{i2}}{m_{i1}}w^2 R_T \text{Cos}(\Phi)} \xrightarrow{-L_1 w^2 R_T \text{Cos}(\Phi)},$$

que hace que se nos vayan los segundos sumandos en cada lado de la igualdad,

$$L_1 \frac{m_{g1}}{m_{i1}}g = L_2 \frac{m_{g2}}{m_{i1}}g,$$

donde ya para finalizar, hacemos uso de que $L_2 = \frac{m_{i1}}{m_{i2}}L_1$ y así,

$$L_1 \frac{m_{g1}}{m_{i1}}g = \cancel{L_2 \frac{m_{g2}}{m_{i1}}g} \xrightarrow{L_1 \frac{m_{g2}}{m_{i2}}}$$

Con lo que,

$$\boxed{\frac{m_{g1}}{m_{i1}} = \frac{m_{g2}}{m_{i2}}},$$

que solo se cumplirá si se da la equivalencia entre masas.

Podemos notar que hemos dicho que el equilibrio en la vertical nos implica el equilibrio en la horizontal. Nosotros, por el contrario, hemos partido de

suponer el equilibrio en el momento de torsión en la horizontal $\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_{i2}}{m_{i1}}}$ y de ahí hemos llegado a que se debe de dar la equivalencia entre masas para que

se dé en la vertical el equilibrio también. Puede parecer que hemos hecho la demostración al contrario, es decir, debíamos partir de A y llegar a B mientras que nosotros hemos partido de B y hemos llegado a A imponiendo una condición (la de equivalencia). Ciertamente es esto, pero dado que lo que tenemos nosotros es $A \Rightarrow B$, es equivalente partir de A y llegar a B que partir de B^\neg y llegar a A^\neg , $B^\neg \Rightarrow A^\neg$. Y esto es lo que hemos hecho, pues si no se da la equivalencia entre masas, cosa a la cual hemos llegado suponiendo B , estaríamos negando B con lo que no se daría A y por ende tendríamos lo expuesto, $B^\neg \Rightarrow A^\neg$. La negación de la equivalencia entre masas implica la negación del equilibrio en la vertical.

A pesar de toda la parafernalia matemática anterior, esto es lo que se observa al realizar el experimento, el momento de torsión en la horizontal es nulo, salvo pequeñas perturbaciones, cuando recreamos las condiciones para que se dé el equilibrio vertical. En la realidad se debe de procurar de aislar al sistema de posibles gradientes térmicos, barométricos, etc. Dicho experimento es muy sensible a pequeñas perturbaciones.

En cuanto a la parte del estudio de las ecuaciones de movimiento del sistema creo que ya hemos tenido suficiente, al menos yo. Creo que se ve claramente cómo podemos demostrar la equivalencia entre ambas masas haciendo uso de este experimento. No me queda nada más que mencionar que la precisión de algunos de los experimentos que se han realizado a lo largo de todos los tiempos con el fin de realizar dicha medida. En concreto, observando la Tabla 1, podemos observar la precisión para el experimento de Eötvös, con la balanza de torsión en 1922, con una sensibilidad del orden de 5×10^{-9} .

Podemos observar, en la misma Tabla 1, otros experimentos más actuales, en los cuales observamos que se va consiguiendo una mayor sensibilidad a la hora de realizar la medida. Según esta tabla el último experimento se realizó en 2017, aunque supongo que existirán más actuales. Este es un experimento que se realiza en órbita alrededor de la Tierra, el cual se compone por dos aceleradores idénticos junto a dos masas concéntricas. La sensibilidad de este es del orden de 1×10^{-15} .

Llegados aquí no tendría sentido despedirnos sin antes discutir el porqué de todo esto, a qué nos conduce todo lo que hemos desarrollado. **¿Qué implica la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional?**

La equivalencia entre éstas dos masas ya llevó a Einstein a lo que él mismo definió como *'la idea más feliz de mi vida'*. Y es que este resultado le llevó a pensar que esto no tenía que ser una causalidad sino que se daba por la propia naturaleza de la gravedad. Le llevó a enunciar lo que a día de hoy conocemos como **Principio de equivalencia**.

Principio de equivalencia. *'Observadores en caída libre en un campo gravitatorio general son **localmente** equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos **locales** que puedan distinguir entre estas dos situaciones.'*

Es importante resaltar lo de localmente, pues el formalismo matemático que se realiza de la Teoría de la Relatividad General se basa en la localidad, es decir, las bases comienza en el concepto de variedad diferenciable en la cual vamos a definir una variedad lineal en la que seremos capaces de realizar cálculos como si de R^n se tratará. Realmente, lo que se hace es definir un isomorfismo local, en cada punto de la variedad, que nos va desde la propia variedad a R^n , donde ya trabajaremos con mayor facilidad.

En esencia, cuando trabajamos con superficies diferenciables (importante) se define en cada punto de la misma una base local de vectores tangentes a ella. Como dicha base se define para cada punto de la superficie, supuesta la diferenciable, podremos estudiar la superficie de forma intrínseca, ayudándonos de conceptos como la Aplicación de Gauss, Aplicación de Weingarten, Primera forma fundamental, Segunda forma fundamental, etc. Todo lo anterior podrá ser definido una vez tengamos definida una base en cada punto de la variedad, es decir, una vez tengamos nuestro espacio tangente.

- REFERENCIAS

- Janssen, Bert. (2013). Teoría de la Relatividad General, Cap 9. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf>
- Tabla 1: https://en.wikipedia.org/wiki/E%C3%B6tv%C3%B6s_experiment