Tiempos característicos estelares

Ruiz Muñoz, Juan Manuel

25 de marzo del 2022 - Astrofísica Estelar

Consideremos una estrella de masa tipo Sol, $M_\odot = 2 \times 10^{33}\ gr$ con una temperatura efectiva de unos $T_{eff} = 6000\ K$, esto es la temperatura que tendría que tener un cuerpo negro para que emitiera la misma cantidad de energía electromagnética.

Si el ritmo de reacciones nucleares es de $Q = 6\ \frac{MeV}{barión}$ estudiemos los tiempos característicos nucleares, hidrodinámicos y de kelvin para tres radios diferentes: $R_1 = R_\odot$, $R_2 = 100R_\odot$ y $R_3 = 10^7\ m$.

Antes de comenzar expresemos todos los datos en las unidades oportunas para proceder con los cálculos numéricos y no tengamos problemas dimensionales.

- Masa de la estrella, $M = 2 \times 10^{30}\ Kg$
- Temperatura efectiva, $T_{eff} = 6000\ K$
- Ritmo de reacciones nucleares, $Q = 5.753 \times 10^{21}\ \frac{erg}{Kg}$
- Radio solar, $R_\odot = 6.957 \times 10^8\ m$
- Constante de Steffan-Bolztmann, $\sigma = 0.567\ \frac{erg}{sm^2K^4}$

Se ha tenido en cuenta que los bariones son en esencia neutrones y protones cuyas masas son praticamente idénticas, $M_{p^+} \approx 1836M_{\grave{e}}$. Además de que 1 W equivale a $10^6\ \frac{erg}{s}$. No detallaré todos los pasos para obtener las unidades expuestas en las variables del problema.

Se va a suponer que se hace uso de la décima parte del combustible nuclear.

1 Tiempo característico nuclear - $\tau_n = \frac{E_n}{L}$

Definiremos el tiempo característico nuclear como el tiempo necesario para una estrella para quemar un determinado elemento. Cuando decimos que se 'quema' no hay que confundirse y pensar que lo que sucede en los procesos nucleares tiene algo que ver con la combustión en el sentido químico. Aquí lo que sucede es que dos núcleos, de determinados elementos, se fusionan debido a que las fuerzas nucleares (fuerte) vence la repulsión. Y esto es gracias, en parte, a las condiciones de temperatura, presión y densidades (entre otras) que encontramos en el interior estelar. No siempre éstas condiciones son suficientes para que se den procesos de fusión pues mismamente en nuestro estrella, el Sol, no se alcanzan temperaturas suficientes para ello en el núcleo. Tienen que entrar en juego procesos cuánticos como el efecto túnel o incluso catalizadores como el Carbono.

Empecemos con el cálculos de los tiempos.

$$\tau_n^{R_1} = \frac{QM}{10L},$$

siendo $L = 4\pi R_1^2 \sigma T^4$ la luminosidad de la estrella. Antes de todo veamos que nuestra expresión tiene unidades de tiempo.

$$\tau_n^{R_1} = \frac{QM}{10L} = \frac{\frac{erg}{Kg}Kg}{\frac{m^2 K^4 erg}{sm^{K4}}} = \frac{erg \cdot s}{erg} = (s)egundos.$$

Una vez asegurados de que no vamos a cometer ninguna barbarie dimensional podemos comenzar.

$$\tau_n^{R_1} = \frac{1.151 \times 10^{52}}{4.47 \times 10^{34}} \approx 2.574 \times 10^{17}\ s,$$

$$\tau_n^{R_2} = \frac{1}{10000}\tau_n^{R_1} \approx 2.575 \times 10^{13}\ s,$$

$$\tau_n^{R_3} = \frac{1.151 \times 10^{52}}{9.23 \times 10^{30}} \approx 1.246 \times 10^{21}\ s,$$

siendo así la estrella más grande la que menor tiempo de quema tiene y la más enana el mayor de todos.

$$\boxed{\tau_n^{R_3} > \tau_n^{R_1} > \tau_n^{R_2}}$$

2 Tiempo característico de Kelvin - $\tau_K = \frac{\Delta\Omega}{L}$

Imaginemos ahora que la estrella deja de realizar procesos de fusión nuclear sin necesariamente dejar de emitir energía por su superficie. En éstas circunstancias lo que tendremos es que se produce un cambio en la energía potencial gravitatoria de la estrella que será igual a dos veces la energía perdida por la superficie.

En otras palabras podemos decir que este es el tiempo que tiene una estrella para aguantar con una determinada luminosidad a partir de su 'reserva' de energía potencial gravitatoria. Este tiempo es el que rige el tiempo de vida de una protoestrella. Además, como curiosidad, durante mucho tiempo se pensaba que nuestro Sol extraía la energía que emitía de su propia energía potencial gravitatoria. Esto es imposible pues calculando dicho tiempo para el Sol se observa que ya se deberían de haber detectado cambios apreciables en la luminosidad del mismo y es que se sabe por restos geológicos que la luminosidad del Sol lleva siendo similar durante un tiempo mayor al que nos marca el de Kelvin. Es por esto por lo que el Sol debe de sacar su energía de otro mecanismo (el nuclear).

$$\tau_K^{R_1} = \frac{\Delta\Omega}{L} = G\frac{M_\odot^2}{R_1 L} = G\frac{4\times 10^{60}}{6.22\times 10^{42}} \approx 6.43\times 10^{17} G\ s,$$

con G en las unidades adecuadas para que obtengamos segundos.

$$\tau_K^{R_2} = \frac{\tau_K^{R_1}}{100} \approx 6.43\times 10^{15} G\ s,$$

$$\tau_K^{R_3} = G\frac{M_\odot^2}{2R_3 L} = G\frac{4\times 10^{60}}{1.85\times 10^{37}} \approx 2.16\times 10^{23} G\ s,$$

Los tres tiempos se han calculado para cuando la estrella se ha contraído hasta la mitad de su radio inicial.

$$\boxed{\tau_K^{R_3} > \tau_K^{R_1} > \tau_K^{R_2}}$$

Se da de nuevo que el tiempo característico de Kelvin es mayor para estrellas de menor radio. A medida que aumenta el radio el tiempo va disminuyendo. Teniendo en cuenta de que la energía potencial depende inversamente del radio de la estrella es algo que tiene sentido. La energía potencial gravitatoria que experimentara la masa de una estrella de menor radio será de mayor intensidad (más negativa) que la que sufre la masa de una estrella de mayor radio.

Algo similar ocurre para el tiempo nuclear pues al tener una misma masa encerrada en un menor radio provocará que las condiciones en el interior estelar sean más 'extremas' haciendo que el tiempo en consumir el mismo combustible, que otra de radio mayor, sea superior.

3 Tiempo característico hidrodinámico - $\tau_H = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

Vistos los dos tiempos anteriores hablemos por último del tiempo que le llevaría a una estrella recuperar la situación de equilibrio hidrostático.

Puesto que el combustible no es ilimitado en ciertos momentos de la vida de una estrella se da la situación en la que las fuerzas que mantienen el equilibrio se 'descompensan' provocando que una de ellas gane a la otra por un tiempo. Basta fijarnos en el periodo de equilibrio en el que una estrella se encuentra en secuencia principal quemando Hidrógeno. Durante su periodo en secuencia principal la estrella mantendrá un relativo equilibrio hidrostático entre la presión de radiación (causada por la fusión del hidrógeno) y la propia gravedad de la estrella (que tenderá a contraerla). Cuando el ritmo con el que se quema el combustible disminuye, esto es cuando se empieza a acabar el Hidrógeno, la presión de radiación empieza a perder fuerza respecto a la fuerza gravitatoria. Durante un tiempo (tiempo hidrodinámico) la estrella se intenta 'reajustar' para volver al equilibrio. Cuando las condiciones en el interior lo permiten se inicia de nuevo una etapa de quema, en este caso se empezará con el Helio puesto que venimos del Hidrógeno, en el que tendremos un tiempo de quemado igual al tiempo característico nuclear respectivo.

Así, planteando la segunda ley de Newton podemos aproximar que valor tendrá el tiempo hidrodinámico que vamos a tratar, en función de parámetros de la estrella.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{\bigtriangledown P}{\varrho} = -\frac{GM}{R^2},$$

planteando una ecuación de conservación a partir de la Segunda Ley de Newton.

Como en la condiciones en las que nos encontramos carecemos de presión por radiación tendremos que el gradiente barométrico en el interior estelar es nulo. Por ello tenemos que:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = -\frac{GM}{R^2},$$

que podemos expresar también como:

$$\ddot{r} = -G\frac{M}{R^2}.$$

De aquí se extrae la estimación del tiempo hidrodinámico:

$$\tau_H = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Ésta expresión se puede hallar de manera más sencilla realizando un análisis dimensional. Tendremos lo siguiente:

$$\frac{m}{s^2} \text{ (puesto que es una aceleración)} = -G\frac{Kg}{m^2},$$

$$\tau_H(s) = \sqrt{\frac{m^3}{GKg}},$$

con G en las unidades adecuadas.

Veamos entonces qué ocurre con cada uno de los distintos radios:

$$\tau_H^{R_1} = \sqrt{\frac{R_1^3}{GM_\odot}} \approx \frac{0.0129}{\sqrt{G}}\, s,$$

$$\tau_H^{R_2} = \sqrt{10^6}\tau_H^{R_1} \approx \frac{12.9}{\sqrt{G}}\, s,$$

$$\tau_H^{R_3} = \sqrt{\frac{R_3^3}{GM_\odot}} \approx \frac{2.24\times 10^{-5}}{\sqrt{G}}\, s,$$

de nuevo con G en unidades para que obtengamos el tiempo en segundos, s.

$$\boxed{\tau_H^{R_2} > \tau_H^{R_1} > \tau_H^{R_3}}$$

A diferencia que en los dos tiempos característicos anteriores vemos que ahora el mayor es para la estrella con mayor radio mientras que la de menos radio se lleva el menor tiempo. Esto es algo que vemos que debería de pasar si nos fijamos en la expresión que hemos obtenido para el tiempo hidrodinámico. La 3/2 potencia del radio es directamente proporcional a dicho tiempo con lo que a menor radio tendremos un menor tiempo ya que la masa de la estrella se mantiene igual para los tres casos.