FORMULARIO ELECTROMAGNETISMO I

Ruiz Muñoz, Juan Manuel

Curso 2020 - 2021

1. Pueden ser útiles las siguientes relaciones

- $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, A) = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, A) = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A.$

COORDENADAS CILÍNDRICAS - Proyectando sobre $Or\theta$ obtenemos coordenadas polares.

Considerando la parametrización usual del cilindro tenemos que el jacobiano de la transformación se puede escribir como

$$|J| = r,$$

con $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ y $z \in \mathbb{R}$.

- ***Gradiente***

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

- ***Divergencia***

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- ***Rotacional***

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}, \frac{V_r}{\partial z} - \frac{V_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)$$

- ***Laplaciano***

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Definiendo el espacio tangente en cada punto de la superficie podemos considerar una base de vectores tangentes a las 'lineas' coordenadas (lo mismo que hacemos para hallar la base coordenada de vectores tangentes en superficies, dejamos fija una coordenada y estudiamos como varían las otras)

$$\hat{r} = cos\theta\hat{x} + sen\theta\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -sen\theta\hat{x} + cos\theta\hat{y}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$
$$\hat{x} = cos\theta\hat{r} - sen\theta\hat{\theta}$$
$$\hat{y} = sen\theta\hat{r} + cos\theta\hat{\theta}$$

y así, podemos definir el vector posición $\vec{r} = (x, y, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z) = r(cos\theta\hat{i} + sen\theta\hat{j}) + z\hat{k} = r\hat{r} + z\hat{z}$.

Si tomamos la diferencial de $\vec{r}$ entonces

$$d\vec{r} = (dr, rd\theta, dz).$$

con r la coordenada radial, θ la coordenada polar y z la coordenada perpendicular al plano $Or\theta$.

COORDENADAS ESFÉRICAS

Considerando la parametrización usual de la esfera tenemos que el jacobiano de la transformación podemos escribirlo como

$$|J| = r^2 sen\theta,$$

con $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\rho \in (0, 2\pi)$.

- ***Gradiente***

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)$$

- ***Divergencia***

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial(sen\theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial V_\rho}{\partial \rho}$$

- ***Laplaciano***

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}$$

- ***Rotacional***

$$\nabla\times\vec{V} = \left(\frac{1}{rsen\theta}\left(\frac{\partial(V_\rho sen\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\rho}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\rho} - \frac{\partial(rV_\rho)}{\partial r}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\right)$$

  Definiendo una base coordenada tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= sen\theta cos\rho\hat{x} + sen\theta sen\rho\hat{y} + cos\theta\hat{z}\\
\hat{\theta} &= cos\theta cos\rho\hat{x} + cos\theta sen\rho\hat{y} - sen\theta\hat{z}\\
\hat{\rho} &= -sen\rho\hat{x} + cos\rho\hat{y}\\
\hat{x} &= sen\theta cos\rho\hat{r} + cos\theta cos\rho\hat{\theta} - sen\rho\hat{\rho}\\
\hat{y} &= sen\theta sen\rho\hat{r} + cos\theta sen\rho\hat{\theta} + cos\rho\hat{\rho}\\
\hat{z} &= cos\theta\hat{r} - sen\theta\hat{\theta}
\end{aligned}$$

- ***Vector de posición***

$$\vec{r} = r\hat{r}.$$

- ***Desplazamiento infinitesimal***

$$d\vec{l} = (dr, rd\theta, rsen\theta d\rho).$$

2. ECUACIONES DE MAXWELL

En condiciones generales tenemos que los campos están acoplados pues una variación en uno genera cambios en el otro. Sin embargo, en condiciones **ESTÁTICAS** el acoplamiento desaparece y podemos trabajar con cada campo, B y E, de forma **INDEPENDIENTE**.

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2}$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{4}$$

De (1) y (4) expresamos los campos a partir de funciones potenciales. Si consideramos que

$$div(rot\vec{V}) = 0$$

para todo campo vectorial $\vec{V}$ entonces podemos considerar que

$$\boxed{\vec{B} = rot\vec{A}}$$

y sustituyendo en (1) tenemos que

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{A} = -rot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \longrightarrow rot\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

por tanto $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ es irrotacional, siendo así posible encontar un campo escalar, ϕ, tal que

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi.}$$

LAS ECUACIONES (2) **Y** (3) **NOS SON DE UTILIDAD PARA ENCONTRAR LOS CAMPOS ANTERIORES A PARTIR DE LAS FUENTES DE CAMPO.**

3. ECUACIONES DE POISSON

Si sustituimos las expresiones de los campos que hemos obtenido en función de los potenciales $\vec{A}$ y ϕ tenemos lo que sigue:

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right)$$

que podemos reescribir como

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).$$

Haciendo lo mismo con el campo $\vec{E}$ en (2) obtenemos

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

ECUACIONES GENERALES DE POISSON PARA ϕ y $\vec{A}$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).}$$

$$\boxed{-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.}$$

EN EL CASO ESTÁTICO

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.}$$

Hemos considerado la condición de Lorentz $\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$. (no tener mucho en cuenta, solo como apunte por si hiciera falta)

4. CAMPO ELÉCTRICO

- ***Características de los medios a tener en cuenta***
  - **LINEALIDAD**
    En general, $\vec{E}$ y $\vec{D}$ no son paralelos.
  - **ISOTROPÍA**
    Las propiedades eléctricas no nos van a depender de la dirección del campo $\vec{E}$ y $\boxed{\epsilon = \epsilon(\vec{r}) \neq cte}$ (CUIDADO CON ESTO)
    En caso de que nos den $\epsilon(\vec{r})$ 'no tendremos problemas' pero en caso contrario **habrá que determinar su expresión matemática en toda la región**.

    $$\epsilon = \int\cdots\int_R \epsilon(r)dR$$

  - **HOMOGÉNEO**
    ϵ no nos va a depender de la posición ya que las propiedades eléctricas son independientes de la misma.

    $$\boxed{\epsilon = \epsilon(\vec{r}) \equiv CTE}$$

- **MEDIO IHL**
  En este caso en particular no debemos de preocuparnos de nada, prácticamente todo es perfecto pues tenemos todas las propiedades anteriores.
  $$\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

- ***Permitividad eléctrica del medio/relativa y susceptibilidad eléctrica***

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r} \quad \boxed{\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad \boxed{\chi_e = \epsilon_r - 1 > 0} \quad \boxed{\vec{D} = (1 + \chi_e)\,\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}}$$

- **Aproximación multipolar**

$$V(r) = \frac{1}{4\pi r \epsilon_0}\left[\sum q_i + \frac{1}{r}\sum q_i r_i cos\theta_i + \frac{1}{r^2}\sum \frac{q_i r_i^2}{2}(3cos\theta_i - 1) + E_3\right]$$

- ***Ley de Gauss generalizada***

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int \cdots \int_R \rho(\vec{r}) dR$$

con $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, (para IHL).

- ***Ley de Gauss***

$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon}\int \cdots \int_R \rho(\vec{r}) dR = \frac{Q_t}{\epsilon}$$

- ***Desplazamiento eléctrico***

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \overset{IHL}{\Longrightarrow} \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

- ***Densidades ligadas de carga/Condiciones de contorno***

$$\boxed{\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}} \quad \boxed{\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}}$$

$$\boxed{\left(\vec{E_2} - \vec{E_1}\right) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad \boxed{\left(\vec{E_2} - \vec{E_1}\right) \cdot \hat{t} = 0}$$

$$\boxed{(\phi_2 - \phi_1) = 0} \quad \boxed{\left(\vec{E_2} - \vec{E_1}\right) \cdot \hat{t} = 0}$$

$$\boxed{\left(\vec{D_2} - \vec{D_1}\right) \cdot \hat{t} = (\vec{P_2} - \vec{P_1}) \cdot \hat{t}} \quad \boxed{\left(\epsilon_2 \vec{E_2} - \epsilon_1 \vec{E_1}\right) \cdot \hat{n} = \left(\vec{D_2} - \vec{D_1}\right) \cdot \hat{n} = \sigma_f}$$

- ***Capacitores Planos/Cilíndricos/Esféricos***

$$\boxed{Q = C\Delta V} \quad \boxed{C = \frac{\epsilon A}{d}} \quad \boxed{C = \frac{2\pi\epsilon L}{Log\left(\frac{b}{a}\right)}} \quad \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}}$$

5. CORRIENTES ELÉCTRICAS

$$\boxed{I = \lambda v} \quad \boxed{K = \sigma v} \quad \boxed{J = \rho v}$$

- **Cómo obtener la corriente a partir de ellas**

$$\boxed{I = \oint_L KdL} \quad \boxed{I = \oiint_S JdS}$$

- ***Ecuación de Continuidad***

  La medida en la que disminuye la carga en el interior debe ser igual al flujo de corriente que sale del mismo, entonces

$$\oiint_S JdS = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_V \rho dV = \oiiint_V (\nabla \cdot J)\, dV$$

  y podemos así escribir

$$\boxed{\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.}$$

  pues consideramos que el volumen arbitrario no depende del tiempo.

  Para hallar las condiciones de contorno basta con desarrollar la ecuación de continuidad para cada componente.

- **Condiciones de contorno/Densidad de polarización**

$$\boxed{\hat{n}\,(J_2 - J_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}} \quad \boxed{J_b = \frac{\partial P}{\partial t}}$$

  La ecuación de continuidad debe de darse para densidades de corrientes libres y ligadas.

- ***Relaciones a considerar en conductores***

$$\boxed{V_a = \mu E} \quad \boxed{J = \sigma E} \quad \boxed{\hat{n}\,(\sigma_2 E_2 - \sigma_1 E_1) = 0} \quad \boxed{\sigma = nq\mu}$$

- ***Ley de OHM***

$$IR = V$$

6. CAMPO MAGNÉTICO

- ***Ley de Ampère***

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \mu_0 I_{int}$$

- ***Condiciones de contorno* (dos primeras tangenciales, tercera normales)**

$$\boxed{\left(\vec{B_2} - \vec{B_1}\right) \cdot \hat{n} = \mu_0 K} \quad \boxed{\hat{t} \cdot \left(\vec{B_2} - \vec{B_1}\right) = \mu_0 K \times \hat{n}} \quad \boxed{\left(\vec{B_2} - \vec{B_1}\right) \cdot \hat{n} = 0}$$

- ***Las lineas de campo se cierran generando curvas/caminos cerrados (ecuación (4))***

$$\boxed{div\vec{B} = 0}$$

- ***El potencial vector es continuo siempre en las interfases. Ocurre lo mismo que con el potencial eléctrico ϕ***

$$\boxed{\vec{A_2} = \vec{A_1}}$$

- ***Aproximación Multipolar***

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\int_{V'} J(r')d\tau^{'} + \frac{1}{r}\int_{V'} J(r')(\hat{r}\cdot\vec{r'})d\tau' + \frac{1}{2r^2}\int_{V'} J(r')\left(3(\hat{r}\cdot\vec{r'})^2 - r'^2\right)d\tau'\right]$$

- ***Magnetización/Densidades de corriente de magnetización***

$$\boxed{\vec{m} = \iiint_V M(\vec{r})dV} \quad \boxed{J_m = \nabla \times \vec{M} \overset{uniforme}{\Longrightarrow} J_m = 0} \quad \boxed{\vec{K_m} = M \times \hat{n}}$$

- ***Ley de Ampère generalizada***

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} = \mu_0\left(J_f + \nabla\times M\right) \longrightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f \Longrightarrow \boxed{\oint_s \vec{H}d\vec{S} = I_f}$$

con $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{M}$.

- ***Condiciones contorno para H (primera normales, segunda y tercera tangenciales)***

$$\boxed{\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\cdot\hat{n} = -\hat{n}\cdot\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right)} \quad \boxed{\hat{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = K_f} \quad \boxed{H_{2t} - H_{1t} = K_f\times\hat{n}}$$

- ***Relaciones a tener en cuenta (IHL)***

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m} \quad \boxed{\mu = \mu_r\mu_0} \quad \boxed{\vec{M} = \chi_m\vec{H}} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H} = \mu\vec{H}}$$

$$\boxed{\vec{J}_m = \chi_m\vec{J}_f = (\mu_r - 1)\vec{J}_f} \quad \boxed{\vec{J} = (1+\chi_m)\vec{J}_f = \mu_r J_f}$$

- ***Algunos materiales***
  - Diamagnético: $\chi_m < 0$.
  - Paramagnetismo: $\chi_m > 0$.

- ***Campo H, componentes normales/tangenciales (IHL)***

$$\boxed{\hat{n}\cdot\left(\mu_2\vec{H}_2 - \mu_1\vec{H}_1\right) = 0} \quad \boxed{\hat{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = K_f}$$

- ***Campo B, componentes normales/tangenciales (IHL)***

$$\boxed{\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0} \quad \boxed{\hat{n}\times\left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1}\right) = K_f}$$

7. INDUCCIÓN MAGNÉTICA

- ***Ley de Faraday-Lenz***

$$\boxed{V_{ind} = -N\frac{\partial\Phi}{\partial t}}$$