

RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

Ruiz Muñoz, Juan Manuel

15 de diciembre del 2021

En el universo hay millones de cuerpos que son agrupados por la comunidad científica en función de sus características. Por ejemplo, tenemos cuerpos masivos que presentan actividad nuclear en su interior e irradian con sus reacciones energía al exterior. Estos se denominan estrellas y son las *creadoras de vida* de nuestro universo pues en ellas se crean los diferentes elementos que abundan en él (por nucleosíntesis estelar).

Las estrellas son capaces de irradiar por si solas, sin embargo existen otros cuerpos que no lo son (al menos no con tanta potencia). El ejemplo más ilustrativo es nuestro satélite natural, la Luna. Esta es apreciable algunas noches en el cielo. Aquí nos podemos preguntar "Si no emite como las estrellas, **¿porqué podemos verla?, ¿porqué, en ocasiones, hacemos referencia a la luz de la Luna?**". Son preguntas bastante interesantes aunque siendo sincero su respuesta no tiene mucha intriga a día de hoy.

La luz de la Luna realmente es luz del Sol que 'rebota' en su superficie y nos llega a la Tierra. Y es que esta no presenta una actividad en su interior que le aporte energía que radiar. Aunque, según lo que vamos a estudiar a continuación, por el simple hecho de tener una temperatura mayor a 0 cualquier cuerpo debería de emitir radiación térmica. Alcanzar una temperatura absoluta nula (en escala kelvin) es imposible según ciertos principios de la física, por ello, incluso la Luna, en ausencia de una fuente interna que la caliente, debería de emitir. Eso sí, lo hará con menor "fuerza" que el Sol.

La Tierra, con un carácter rocoso como la Luna, por el contrario a ella presenta una mayor emisión de radiación (energía térmica). Esto se debe a que en el interior de la Tierra tenemos actividad, distinta de la nuclear. La Tierra emite energía de forma proporcional a su temperatura interna, al igual que las estrellas.

Dejando de lado a los astros podemos extrapolar lo anterior a cuerpos de nuestro día a día. Mismamente, cualquier ser vivo emite energía. Los humanos no brillamos como estrellas pero si nos observamos con un filtro en el infrarrojo podríamos observarnos. Entonces, **¿qué diferencia a una estrella de nosotros?, ¿porqué ellas emiten radiación que podemos ver a simple vista y nosotros no?**.

La temperatura de los seres vivos es insignificante comparada con la de una estrella. Incluso comparándola con las de las más frías (sin contemplar la de algunas enanas que poseen temperaturas comparables con la de los seres humanos). Y es que la intensidad en la que emite energía un cuerpo va a depender en buena medida a su temperatura. Veremos más adelante que esto nos permite averiguar muchas cosas de las estrellas a partir de observarlas y medir su radiación.

A temperaturas humanas se emite en un rango del infrarrojo (IR), mientras que a temperaturas estelares comenzamos a emitir, con mayor intensidad, en el rango visible. Es por eso por lo que el Sol se percibe con un color característico, al igual que muchas otras estrellas. De nuevo, podemos preguntarnos **"Si a temperaturas humanas no emitimos en el visible, ¿cómo es posible que nos veamos?"**, es decir, deberíamos de necesitar de unas gafas especiales que nos permitieran observar en el IR, no?. Obviamente, esto no es así pues nos apreciamos en nuestro día a día, no somos invisibles.

Al igual que con la pregunta de *la luz de la Luna*, la respuesta es que observamos los objetos debido a que nos llega luz de ellos. Esta luz no necesariamente debe ser emitida por ellos directamente, basta con que esta los alcance y "rebote" en ellos.

Con esto podemos concluir que la emisión de un cuerpo se compone en una parte por la propia radiación emitida por su temperatura y por otra, la reflejada en su superficie que proviene de alguna fuente de energía externa a ella.

Sería interesante encontrar cuerpos que exclusivamente emitan radiación térmica, debido a su temperatura. A esto es a lo que se denomina **CUERPO NEGRO**.

En la naturaleza no existen cuerpos con esta característica. Este cuerpo es una idealización que con las consideraciones adecuadas se puede construir en un laboratorio. No obstante, hay algunos cuerpos que se pueden aproximar al comportamiento de este. Las estrellas mismamente son tratadas como aproximaciones cercanas a estos pues su emisividad es lo suficiente intensa como para poder despreciar la radiación debida a la reflexión. Podríamos decir que las estrellas brillan por sí solas. Además, la gran mayoría de ellas, se encuentran a una gran distancia de otras, con lo que se puede considerar que no se ven afectadas por la emisión de otros cuerpos/estrellas.

Una vez llegados aquí podemos pensar en cuantificar esta radiación para poder tratar de averiguar en que medida la temperatura de un cuerpo influye en su emitancia. Así nos será posible reafirmar lo expuesto al inicio *"Las estrellas son apreciables en el visible, a diferencia de nosotros, porque su temperatura es mayor a la de un humano"*.

1 Estadística de Bose-Einstein.

Hablaremos de dicha estadística y no de la de **Fermi-Dirac** ya que el objeto de estudio principal son los fotones, que son bosones. Cuando hablamos de bosones se necesita hacer uso de la estadística de **Bose**, mientras que cuando se trata de fermiones se utiliza la de **Fermi**.

Los bosones son partículas, que en principio, son indistinguibles haciendo posible caracterizar un estado del sistema por el número de partículas que se encuentra en el mismo estado energético.

Consideremos la colectividad macrocanónica y con ello la función de partición, **Z**:

$$Z = \sum_R e^{-\beta \sum_r (E_r n_r - \mu n_r)} = \sum_R \prod_r e^{-\beta (E_r n_r - \mu n_r)}.$$

Ahora bien, si nos fijamos tenemos una serie geométrica de razón $r = \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta(E_r - \mu)} \neq$

1. Condición de convergencia $r = \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta(E_r - \mu)} < 1$. Para ello $\boxed{E_r - \mu > 0}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_r} \prod_r e^{-\beta (E_r n_r - \mu n_r)} = \prod_r \sum_{n_r} e^{-\beta (E_r n_r - \mu n_r)} = \prod_r \lim_{n_r \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n_r}}{1 - r} \\ &= \prod_r \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta(E_r - \mu)}} = \prod_r \frac{1}{1 - e^{-\beta(E_r - \mu)}} = Z. \end{aligned}$$

Lo que viene a continuación se deriva de maximizar la entropía imponiendo las condiciones de ligadura que siguen,

$$\begin{aligned} \sum_i p_i &= 1 \\ \sum_i p_i E_i &= \langle E \rangle \equiv cte, \\ \sum_i p_i N_i &= \langle N \rangle \equiv cte. \end{aligned}$$

Así, obtendremos por el método de los multiplicadores de Lagrange que;

$$F(p_i) = -K_b \sum_i p_i \log(p_i) + \alpha \left[\sum_i p_i - 1 \right] + \beta \left[\sum_i p_i E_i - \langle E \rangle \right] + \gamma \left[\sum_i p_i N_i - \langle N \rangle \right],$$

con α, β, γ parámetros de Lagrange, siendo el primer sumando de la expresión la función entropía.

Buscando ahora los puntos críticos de $F = F(p_i)$ tenemos la densidad de probabilidad que buscábamos,

$$\frac{\partial}{\partial p_i} F = \log(p_i) + 1 + \alpha + \beta E_i + \gamma N_i = 0,$$

y si despejamos p_i ;

$$p_i = e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta E_i - \gamma N_i},$$

que podemos normalizar si multiplicamos por el factor $e^{1+\alpha}$, entonces;

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i - \gamma N_i}}{Z}$$

con Z la función de partición inicialmente definida para la colectividad macrocanónica.

Llamando a $\gamma = -\beta\mu$, podemos reescribir lo anterior como;

$$p_i = \frac{e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{Z}.$$

POR TANTO, ahora sustituyendo en la función entropía que hemos considerado

$$\begin{aligned} S = S(p_i) &= -K_b \sum_i p_i \log(p_i) = k\beta \sum_i \left(\frac{e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{Z} E_i \right) - k\mu \sum_i \left(\frac{e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{Z} N_i \right) \\ &= +k\log(Z) \sum_i \frac{e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{Z} = \boxed{k\beta E - k\mu N + k\log(Z) = S_{max}} \end{aligned}$$

Este resultado se ha hallado a partir de hacer la probabilidad máxima, con lo que será la mayor entropía del sistema. Definiendo el potencial de Helmholtz como $F = U - TS_{max} = -K_b T \log(Z)$ y considerando que $\frac{\partial}{\partial \mu} F = -N$ podemos encontrar lo que empezamos buscando, *el número de ocupación media* para la distribución de Bose.

Escribamos las expresiones con lo obtenido e igualemos,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F = - \sum_r \frac{e^{-\beta(E_r - \mu)}}{1 - e^{-\beta(E_r - \mu)}} = -N = - \sum_r n_r, \quad (1)$$

pues el potencial de Helmholtz se puede escribir como,

$$F = -K_b T \sum_r \log(1 - e^{-\beta(E_r - \mu)}).$$

De (1) podemos hallar el número medio de ocupación,

$$n_r = - \frac{e^{-\beta(E_r - \mu)}}{1 - e^{-\beta(E_r - \mu)}} = \boxed{\frac{1}{e^{\beta(E_r - \mu)} - 1} = \langle n_r \rangle}.$$

2 Cuantificación de la energía irradiada.

En la sección anterior hemos encontrado la función de densidad de la estadística de Bose. Con ella, nos es posible cuantificar el número medio de partículas que ocuparán un cierto estado energético. En términos matemáticos sería decir que dicha distribución nos pondera cada energía en función de lo probable que sea que una partícula lo ocupe.

Como trabajaremos con fotones (bosones), el número medio de ocupación vivirá en el intervalo $[0, \infty]$ pues, al contrario que los fermiones, no siguen el *principio de exclusión de Pauli*. Si trabajáramos con fermiones (por ejemplo, electrones) el número medio de ocupación solo podría tomar valores iguales a la unidad o cero, $n_r = 0, 1$.

2.1 Potencial químico para fotones.

Antes de comenzar a intentar hallar la expresión analítica que nos determine la densidad de energía irradiada por un cuerpo negro es necesario aclarar el concepto de potencial químico. En el ámbito de la física de partículas el potencial químico nos da una idea de cómo va a cambiar una función de estado en el sistema. En este caso nos centraremos en la energía interna total.

$$\frac{\partial}{\partial N} F = 0 \longrightarrow \mu = 0,$$

pues se debe de cumplir, para unos valores de volumen y temperatura dados, que la energía interna sea mínima. Además, $\frac{\partial}{\partial N} F = \mu$.

Como supondremos que el sistema se encuentra en **EQUILIBRIO** tendremos que los fotones en el sistema serán emitidos y absorbidos sin cambiar la energía interna pues por Kirchhoff el ritmo con el que se emite y absorben dichos fotones será el mismo.

Sin embargo, aunque en nuestras consideraciones siguientes consideraremos el potencial químico como nulo no siempre que tengamos un sistema de fotones habrá que definirlo como cero.

Un ejemplo sería considerar un sistema que no está en equilibrio en el que tengamos fotones interactuando con el sistema. Al no encontrarse el sistema en equilibrio no se dará la Ley de Kirchhoff y la energía interna del sistema cambiará.

2.2 Energía emitida.

Tras este pequeño parón, hemos visto que el potencial químico para fotones es nulo, $\mu = 0$. Además, como bien sabemos, la energía de un fotón viene descrita por $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$.

Sería lógico pensar que la energía total para una frecuencia de energía fuera la energía media, asociada a dicha frecuencia, multiplicado por el número de

partículas con dicha frecuencia (o energía). Esto no es una idea alocada pues habrá tanta energía como partículas ocupen dicho estado. Si tenemos un millar de partículas con energías $E_1, E_2, \dots, E_{1000}$ la energía total de todas ellas es $E_t = \sum_i^{1000} E_i = 1000E_1$, PARA ESE ESTADO DE ENERGÍA.

En el caso de que tengamos un número muy elevado de partículas en un mismo estado energético podemos proceder de la misma forma. Tomaremos el valor medio de la energía de ese estado y por ende, la energía total será $E_t = n \langle E \rangle$, con n el número de partículas en ese estado.

Si llamamos $u = u(\nu)$ a la energía para una ν en particular podemos escribir,

$$u(\nu)d\nu = \langle n(\nu) \rangle \langle E(\nu) \rangle d\nu = n(\nu)E(\nu)d\nu.$$

Centrémonos en encontrar las expresiones analíticas tanto del valor medio de ocupación como de la energía media. La energía media de cada fotón con frecuencia ν se puede escribir como

$$E(\nu) = E_{fotón} \rho(\nu),$$

donde $\rho(\nu)$ denota la forma en la que se distribuye la probabilidad para ν . En otras palabras, es la función de densidad, que sabemos que es,

$$\rho(E(\nu, \mu)) = \rho(h\nu, 0) = \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1},$$

por tratarse de la distribución de Bose-Einstein.

Por tanto, sustituyendo en la igualdad de la energía tenemos,

$$E(\nu) = h\nu \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Si consideramos que $\beta h\nu = \frac{h\nu}{kT}$ es pequeño o bien, que $kT \gg h\nu$ entonces,

$$E(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \approx \frac{h\nu}{\beta h\nu} = KT,$$

pues desarrollando a $e^{\beta h\nu}$ alrededor del cero en serie de Taylor tenemos que $e^{\beta h\nu} = 1 + \beta h\nu + o^2()$.

Este resultado viene a ser lo que nos dice el Principio de Equipartición. Basándonos en esto, veamos qué ocurre cuando intentemos hallar la energía total a lo largo de todas las frecuencias.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u(\nu) d\nu = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b n(\nu) E(\nu) d\nu = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b n(\nu) KT d\nu,$$

la cual es una integral impropia que diverge. Esto es lo que se conoce como la **CATÁSTROFE DEL ULTRAVIOLETA**.

Por lo que, las ideas clásicas fallan, parece que no nos sirven para este caso. En principio no tendría sentido el resultado anterior pues estaríamos hablando de energía infinita, cosa que carece de fundamento en la actualidad. Será necesario una nueva visión del problema, dejando de lado lo clásico.

Imaginemos ahora que disponemos de una partícula libre de masa m y momento p . Esta partícula puede tomar valores de energías cualesquiera, no hay nada que nos diga lo contrario, la partícula puede moverse con total libertad, $E_p = \frac{p^2}{2m}$. **¿Pasará algo si limitamos el movimiento de dicha partícula a una cierta región acotada?** Según los pensamientos cuánticos, Sí. La partícula se verá obligada a moverse en una región y no podrá tomar cualquier valor de energía, se deberá de mover en ciertos niveles.

Todo esto surge de intentar interpretar ciertos sucesos como clásicos. En el momento que se intentó interpretar un fenómeno cuántico como clásico nos dimos cuenta de que los resultados experimentales no concordaban con lo que esperaríamos. Esto mismo es lo que nos acaba de suceder con la denominada Catástrofe Ultravioleta pues los resultados experimentales muestran claramente que la energía emitida por un cuerpo negro no es infinita, al contrario de lo que nos sale analíticamente. Esto se debe a un erróneo planteamiento del problema. Nuestras ideas clásicas no son válidas y debemos de enfocarnos en la cuantización de la energía.

Podríamos decir que el primero en utilizar fundamentos cuánticos para dar explicación a un fenómeno de la naturaleza fue Planck pues, a pesar de no hacerle mucha gracia, se vio forzado a hacer uso de la idea de que la energía de los osciladores de la cavidad del cuerpo negro estaba cuantizada. Además de ser una solución para el problema del Ultravioleta esta idea supuso un gran impulso para la física pues incluso Einstein se apoyó en ella para explicar el efecto fotoeléctrico.

Y es que la idea de que la energía está cuantizada nos aparece en muchas situaciones. Aquellas en las que tenemos condiciones de contorno espaciales, en las que se restringe el movimiento de una partícula a la de un oscilador armónico. Si resolvemos la ecuación de onda de Schrödinger para un pozo de potencial finito/infinito de anchura L , tenemos que en esa región la energía se discretiza. Esto sucede ya que debido al carácter ondulatorio de la materia (De Broglie) la longitud de onda asociada debe ser múltiplo de la anchura del pozo, es decir, que la onda no puede tomar valores de energía que impliquen que esto no se cumpla pues de lo contrario la onda no podría existir. Se debe de cumplir que $n_i \lambda = 2L$ para $i = x, y, z$. siendo n_i los modos de vibración para cada dirección del espacio.

Dejemos de lado esta discusión y ataquemos de nuevo el problema desde un punto de vista cuántico. Al final del informe discutiremos un caso muy curioso en el que podemos observar la discretización de la energía en el movimiento de un péndulo.

Para ello hagamos uso de la condición de que la longitud de onda deba ser un múltiplo de la anchura de la región,

$$n_i \cos(\theta_i) = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L\nu}{c}, \quad \forall i = x, y, z.$$

Elevemos al cuadrado y sumemos la condición anterior para una frecuencia ν ,

$$n_i^2 \cos^2(\theta_i) = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2,$$

donde necesariamente se debe de cumplir que $\sum_i \cos(\theta_i) = 1$. Esto será nuestra condición de cuantización al encontrarnos en un espacio tridimensional.

Si nos fijamos vemos que tenemos una esfera en el espacio de las n_i con lo que se puede escribir que,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 = R^2,$$

siendo R el radio de la esfera en el espacio de las n_i . Importante darse cuenta de que cuando hablamos de dicha esfera no nos encontramos en R^3 . En este espacio viven los diferentes valores de las n_i e integrando en él nos será posible cuantificar el número total de modos permitidos.

Este número vendrá definido como.

$$N(R)dR = \frac{1}{8}4\pi R^2 dR,$$

el factor $\frac{1}{8}$ viene de que nos restringimos a un octante de dicha esfera.

Haciendo uso de la condición de cuantización $R = \frac{2L\nu}{c}$ tomemos un cambio de variable,

$$N(\nu)d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2L}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu,$$

y tomando los valores por unidad de volumen,

$$n(\nu)d\nu = \frac{N(\nu)}{L^3}d\nu = \frac{4\pi}{c^3}\nu^2 d\nu.$$

Una vez llegados aquí no debemos olvidarnos de que vamos a trabajar con fotones, los cuales pueden tener dos polarizaciones distintas. Esta característica se debe de tener en cuenta y la cuantificaremos en nuestras expresiones a partir del factor de degeneración $g(\nu) = 2$,

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu.$$

Volvamos a calcular la energía irradiada como hicimos cuando pensábamos clásicamente, es decir, $u(\nu)d\nu = n(\nu)d\nu \langle E(\nu) \rangle$, entonces;

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \frac{h\nu}{e^{(\beta h\nu)} - 1},$$

donde esta vez resolveremos la integral sin realizar una aproximación por desarrollo de Taylor de la función exponencial.

Reordenando tenemos

$$\boxed{u(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{(\beta h\nu)} - 1} d\nu},$$

obteniendo así la expresión que andábamos buscando para cuantificar la densidad de energía irradiada por un cuerpo negro. Algo importante es que no debemos confundir la densidad de energía con el flujo pues son cosas diferentes. Esta ecuación nos representa la densidad de energía mientras que el flujo de energía se relaciona con este tal que $u = \frac{4\pi}{c} J$, siendo J la expresión que se nos presenta en el guión de la práctica que más tarde trataremos.

2.3 Ley de desplazamiento de Wien.

Expresemos la ecuación de la densidad de energía en función de la longitud de onda, λ . Para ello bastará considerar que $\nu = \frac{c}{\lambda}$, entonces,

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(\beta hc/\lambda)} - 1}$$

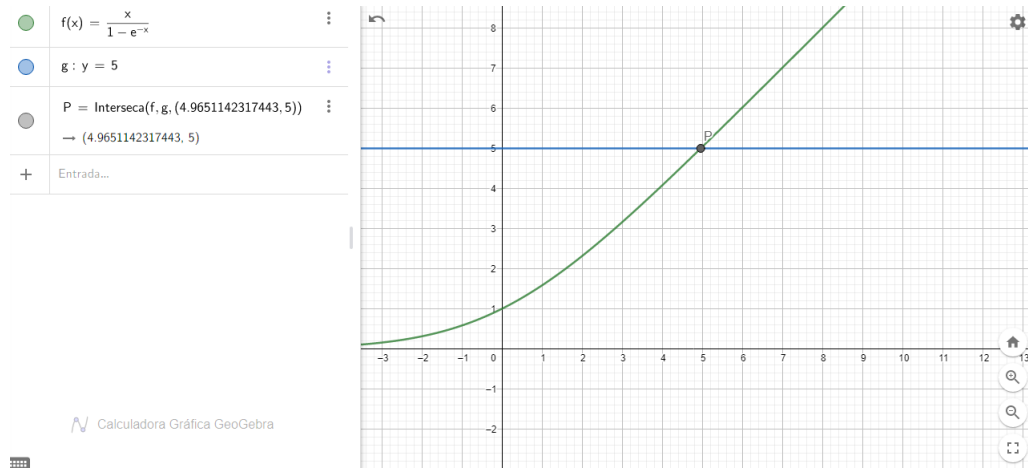
Podemos buscar ahora cuál es el valor de λ que hace máxima la función,

$$\frac{du}{d\lambda}(\lambda) = 0,$$

entonces, eludiendo toda la derivación y llamando a $x = \frac{\beta hc}{\lambda}$ llegamos a

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = 5.$$

Las raíces de dicha función son complicadas de encontrar de forma analítica. Utilizaremos el programa *GeoGebra* para representar las funciones $f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$ y $g(y) = 5$. Así podremos observar la solución estudiando el punto de corte entre ambas.



El punto P nos muestra la intersección de ambas funciones. Este punto es $P = (4.965, 5)$. A nosotros nos interesa el valor de la variable horizontalmente representada, OX con lo que $x \approx 4.965$. Deshaciendo el cambio de variable de la forma

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{Kx} \approx 0.0029 \text{ m} \cdot K.$$

Tenemos lo que buscábamos, la **Ley de desplazamiento de Wien**,

$$\lambda_{max}T = cte.$$

Esta nos será de ayuda para retroceder al tema de las estrellas, además de en nuestro principal objetivo, la práctica 6 de Stefan-Boltzmann.

2.4 Ley de Wien.

Consideremos el hiperplano entrópico en función de las variables energía, E , y volumen, V ,

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV = \frac{du}{dT}VdT + udV + \frac{1}{3}udV,$$

donde hemos utilizado que $p = \frac{1}{3}u$ y $E = uV$. La relación entre la presión y la densidad de energía media no la demostraré para no alargarme más en los desarrollos. Esta sale de considerar $p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \log(Z)$ y que la energía media de un estado es proporcional al volumen tal que $E_r = CV^{-1/3}$. Por otro lado, la relación entre la energía y la densidad de energía es obvia, al multiplicar la densidad por un volumen esta adquiere unidades de energía.

Volviendo al desarrollo anterior, podemos reagrupar diferenciales,

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV,$$

y podemos relacionar así a los términos de cada diferencial como sigue,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V &= \frac{V}{T} \frac{du}{dT}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \frac{4}{3} \frac{u}{T}.\end{aligned}$$

Podemos aplicar el Teorema de Schwarz (damos por hecho que tenemos continuidad) que nos dice que las derivadas parciales segundas cruzadas coinciden $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$. Por tanto, tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \frac{du}{dT} &= -\frac{4}{3} \frac{u}{T^2} + \frac{4}{3} \frac{du}{dT} \frac{1}{T} \\ \frac{4}{3} \frac{u}{T^2} &= \frac{1}{3} \frac{du}{dT} \frac{1}{T} \\ \frac{du}{dT} &= 4 \frac{u}{T}.\end{aligned}$$

Esto es una ecuación diferencial ordinaria que se resuelve sin mayor complicación,

$$\log(u) = 4 \log(T) + K,$$

y entonces llegamos a que $\boxed{u = CT^4}$.

A esto se le conoce como **Ley de Wien** y no se debe de confundir con la ley de desplazamiento.

3 Lámpara de Wolframio como una Estrella.

Como dijimos al principio las estrellas son una buena aproximación al concepto de cuerpo negro pues éstas presentan una emitancia cercana a la unidad, es decir, que el cociente entre la cantidad de energía que irradian comparada con la de un cuerpo negro son muy parecidas, $e_o/e_{c.negro} \approx 1$.

La emisión de una estrella se debe, como ya hemos visto y demostrado, a su temperatura (Ley de Wien). Esta depende en buena medida de cómo sean las reacciones nucleares que ocurren en su interior.

Pensemos ahora en una lámpara que emite luz. Esta emisión se debe a lo tratado a lo largo de este informe. En el interior de una bombilla/lámpara encontramos una resistencia que se resiste al paso de la corriente de electrones, valga la redundancia. En este acto resistivo encontramos una disipación de energía que provoca que la resistencia se caliente y por tanto, según nuestros argumentos emita radiación térmica.

Esto es lo que haremos en el laboratorio, tomaremos datos de la emisión de radiación de una lámpara de Wolframio. A pesar de que idealizaremos el experimento considerando que estamos tratando con un cuerpo negro hay que resaltar

de que ya siendo la idealización bastante aventurada lo es aún más teniendo en cuenta de que no nos preocupamos de que se encuentre en equilibrio térmico ni aún menos de la radiación electromagnética externa que se reflejará en el cristal que envuelve a la resistencia. Ciertamente, que al estar recubierta la resistencia tendremos un equilibrio térmico relativo. El cristal nos dará cierta estabilidad pudiendo aventurarnos en la primera idealización del equilibrio térmico.

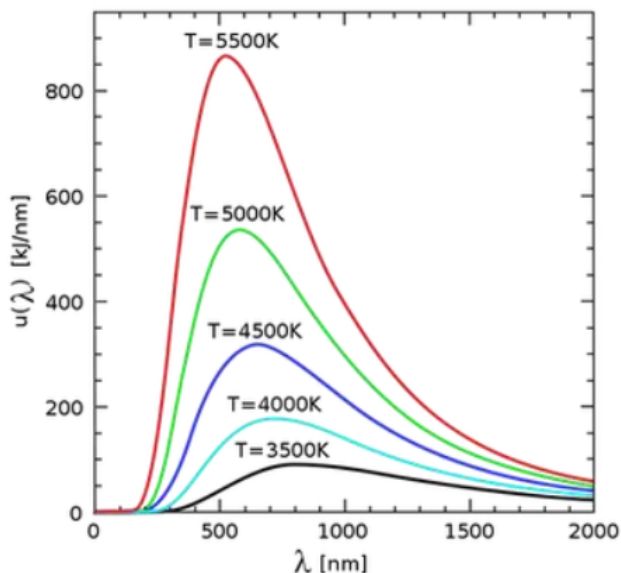


Figura 3.1: Energía emitida para distintas temperaturas.

Cuando midamos la densidad de energía con la termopila para distintas temperaturas podríamos obtener una representación como la de la Figura 3.1.

Para ello tendríamos que separar cada longitud de onda para una temperatura dada. Ciertamente es que disponemos de material en el laboratorio para ello pero hay tener en cuenta algo, y es que solo sería posible hacerlo con el rango visible.

Lo que se obtendría sería una pequeña parte de las curvas que se observan en la figura pues el espectro visible es una pequeña parte del total. Solo veríamos una pequeña zona del pico para cada temperatura. Además, en la figura se representan temperaturas de más de 3000 K . Veremos más adelante que la mayor temperatura que mediremos será de 1260 K con lo que ya podemos hacernos una idea de lo que nos saldría.

Teniendo en cuenta todo esto no nos tomaremos tiempo en tomar datos para representar una figura similar pues no observaríamos lo buscado.

3.1 Planteamiento del experimento.

Como la temperatura a la que se encuentre la lámpara nos hará variar el valor de la resistencia, tendremos que saber como ésta cambia en función de la temperatura. La relación que tiene la resistencia con la temperatura es la siguiente,

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t + \beta t^2), \quad (2)$$

donde R_0 se define como la resistencia a temperatura igual a cero grados centígrados. Los parámetros α, β son constantes que vienen determinadas por el material de la lámpara, que en este caso es Wolframio. Entonces, $\alpha_W = 4.82 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ y $\beta_W = 6.76 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2}$.

Se procederá tomando medidas de la intensidad de radiación electromagnética emitida por la lámpara a la vez que vamos variando la intensidad de corriente que circula por ella. Esto provocará que la temperatura de la resistencia cambie y por ende, su emisión. Esta intensidad será medida por una termopila que colocaremos a unos diez centímetros, aproximadamente, de ella. La termopila nos responderá con un voltaje que será amplificado con un factor 10^3 . Dicho voltaje S será proporcional a la energía emitida, es decir, $S \propto u$.

Antes de comenzar con la termopila debemos de averiguar el valor de la resistencia a temperatura cero. Con ello, debemos de considerar de que ésta se relaciona a su vez con la resistencia a temperatura ambiente tal que,

$$R_0 = \frac{R_a}{1 + \alpha_W t_a + \beta_W t_a^2}. \quad (3)$$

Medir la temperatura ambiente no nos supone ningún problema. El único factor con el que debemos tomar precauciones es con la cantidad de intensidad que proporcionamos a la lámpara pues como hemos dicho, la resistencia depende de la temperatura y esta a su vez cambiará en función de la cantidad de corriente que circule a través de ella. Por tanto, debemos de trabajar con intensidades muy pequeñas para poder despreciar el aumento de temperatura que sufre la resistencia con el paso de los electrones.

Para ello, sería de utilidad hacer uso de un reóstato que nos permite tener más precisión a la hora de ir variando la corriente. Si trabajásemos directamente con los valores de la fuente de alimentación no tendríamos mucho rango para trabajar con intensidad bajas. El reóstato nos permitirá movernos entre valores de 50 mA y 200 mA en los cuales podemos despreciar el aporte térmico debido a la corriente considerando así que la temperatura es la ambiente como buena aproximación.

3.2 Materiales que utilizaremos.

Como ya hemos dicho haremos uso de una lámpara de Wolframio y de un reóstato. Estos no serán los únicos materiales que utilizaremos. Enumeraremos a continuación todo el material del que hicimos uso.

- Lámpara de filamento de Wolframio, de 6 V y 5 A.
- Termómetro, para medir la temperatura del laboratorio, T_a .
- Reóstato de 100 Ω .
- Fuente de alimentación para la lámpara con un rango de 0 – 6 V.
- Soportes, Amplificador, cables y multímetros necesarios.
- Termopila.

La termopila nos permitirá medir longitudes de onda asociadas en un rango que abarca desde el ultravioleta hasta el infrarrojo lejano. Su sensibilidad no dependerá de la longitud de onda a la que sea expuesta. Por último, la termopila al calentarse también emitirá radiación con lo que la señal medida realmente es proporcional a la diferencia de $T^4 - T_a^4$. En este caso despreciaremos el valor de T_a^4 .

Debemos preocuparnos en cómo funciona la termopila y es que su funcionamiento no es muy complicado de comprender. Lo que ocurre en la termopila es que al ser irradiada el sensor se calienta, en este caso será levemente. Esto genera que se produzca un gradiente térmico entre la parte externa del sensor y la interna generando así una pequeña señal debida a que una pequeña parte de los electrones se desplazan. Es algo parecido a lo que nos ocurre en un transistor, pues vimos en la presentación realizada por mí, junto a mi compañero Miguel, que a medida que aumentábamos la temperatura la corriente que atravesaba a este era mayor. Esto es algo coherente pues en el material existirán electrones que al recibir este incremento de energía térmica 'promocionen' a la banda de conducción del material siendo así posible su movimiento y por tanto que se genere una corriente.

3.3 Midiendo R_0 con un ajuste lineal.

La corriente que circulará por el circuito seguirá la Ley de Ohm. Mediremos datos de la intensidad y voltaje que circula por el mismo.

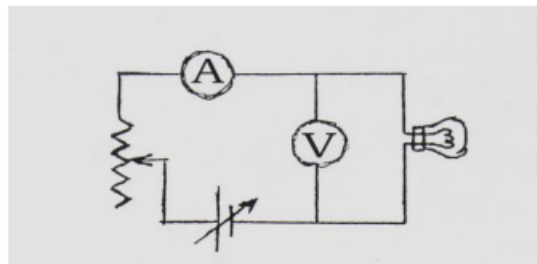


Figura 1: Esquema del circuito montado.

Antes de comenzar, se mide la temperatura del laboratorio, obteniendo así $T_a = 24.5 \pm 0.05^\circ\text{C}$. Consideraremos que a lo largo de la toma de datos el valor se

mantiene invariante.

$I \text{ (mA)}$	$V \text{ (mV)}$
51.3	9.3
54.6	10.0
63.0	11.6
71.2	13.1
92.7	19.2
114.4	23.3
131.4	26.6
165.4	33.8
186.5	38.7

Table 1: Intensidad y voltaje que circula en el circuito a temperatura ambiente.

Como hemos dicho, la corriente en el circuito sigue la Ley de Ohm con lo que podemos realizar un ajuste lineal con los datos obtenidos y hallar una recta experimental con pendiente igual a R_a . El error experimental será sacado del error de la pendiente. Este error nos lo proporcionará el mismo programa con el que realicemos el ajuste, que en este caso es Excel.

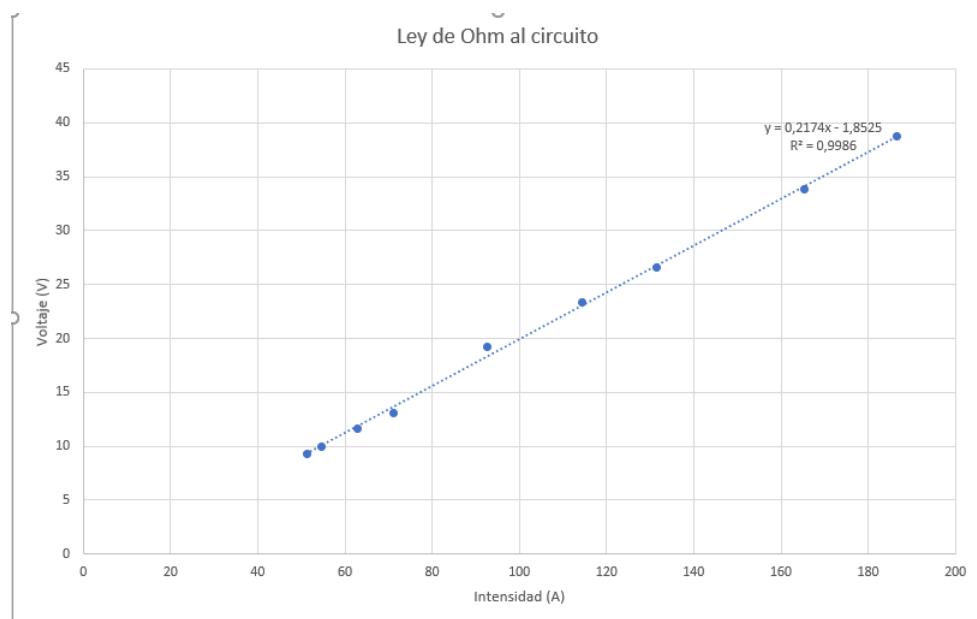


Figura 2: Ajuste lineal a partir de los datos de la Tabla 1.

Obtenemos una recta experimental tal que,

$$V = 0.2174I - 1.8525;$$

con un error $E_{R_a} = 0.0031$ y un coeficiente de correlación lineal $R^2 = 0.9986$. Por lo que tomaremos $R_a = 0.2174 \pm 0.0031 \Omega$. Con un error relativo $\epsilon_r = 1.43\%$.

Sustituyendo ahora en la ecuación (3) obtenemos el valor de R_0 ,

$$R_0 = \frac{R_a}{1 + \alpha_W t_a + \beta_W t_a^2} \pm \left[R_0 \sqrt{\epsilon_{R_a}^2 + (\alpha_W + 2\beta_W t_a)^2 \epsilon_{t_a}^2} \right] = 0.1944 \pm 0.0028 \Omega,$$

con un error relativo $\epsilon_r = 1.43\%$. Donde el error viene de la expresión $\epsilon_{R_0}^2 = \epsilon_{R_a}^2 + (f'(t_a)\epsilon_{t_a})^2$, siendo $f(t_a) = 1 + \alpha_W t_a + \beta_W t_a^2$.

Ya tenemos el valor experimental de la resistencia de la lámpara a temperatura de $0^\circ C$. Ahora podemos comenzar a utilizar la termopila y medir la energía irradiada por el idealizado cuerpo negro. Ya no utilizaremos el reóstato pues ahora estamos dispuestos a que la resistencia se caliente y emita, ese es el objetivo. Mediremos la corriente en el circuito de la lámpara, tanto intensidad como voltaje. Además, en la termopila mediremos una señal en forma de voltaje con ayuda de un voltímetro que se conectará a ella. Dicha señal será amplificada con un factor 10^3 con un amplificador.

Iremos variando los valores de corriente en el circuito con la fuente de alimentación. El sistema se dejará unos minutos para que entre en un estado cuasi-estacionario, es decir, que el valor de la temperatura de la resistencia deje de variar con tanta 'fuerza'. Cuando aumentamos la intensidad de corriente la resistencia comienza a calentarse. Llegará un instante en el cual esto deje de suceder. En la realidad no tenemos un equilibrio total y la temperatura a pesar de alcanzar este punto no se mantendrá constante, no obstante, las variaciones serán despreciadas pues como dijimos al principio debemos de considerar al sistema en equilibrio. Además la corriente en el circuito puede sufrir fluctuaciones debidas a la red eléctrica con lo que son variables que no podemos controlar y con las que deberemos convivir y es por ello que las despreciaremos para encontrarnos en las condiciones idóneas.

Estos son algunas de las causas que pueden alejarnos de lo teórico, pues son factores que están ahí y se deben de tener en cuenta.

<i>Temperatura</i>	<i>I_{circuito} (A)</i>	<i>V_{circuito} (V)</i>	<i>S_{termopila} (V)</i>
t_1	1.69	0.92	0.31
t_2	2.26	1.72	1.06
t_3	2.79	2.57	2.28
t_4	3.24	3.40	3.60
t_5	3.64	4.20	5.29
t_6	4.04	5.04	7.30

Table 2: Valores de S para distintas temperaturas de la resistencia.

En la Tabla 2 todos los valores tienen un error cuantificable de aproximadamente

0.005 *u.m.*. Error dado por la precisión de los aparatos de medida que se utilizaron.

En el circuito se cumple la Ley de Ohm. Veamos el valor de la resistencia en función de la temperatura, $R = R(t_i)$.

$T (^{\circ}C)$	$R (\Omega)$	$\Delta R (\Omega)$
t_1	0.5444	0.0034
t_2	0.7611	0.0028
t_3	0.9211	0.0024
t_4	1.0493	0.0022
t_5	1.1538	0.0021
t_6	1.2475	0.0020

Table 3: Valores experimentales de la resistencia en función de la corriente en el circuito.

Los errores de la resistencia R de la Tabla 3 han sido hallados a partir de $\Delta R = R\sqrt{\epsilon_I^2 + \epsilon_V^2}$.

Para poder comprobar si se cumple la Ley de Wien sería interesante encontrar los valores experimentales de la temperatura t_i . Para ello, debemos de hacer uso de la expresión (2), que nos relaciona cada una de las resistencias, R_t , de la Tabla 3 con la temperatura a la que se encontraba. En ella podemos despejar las temperaturas y resolver una ecuación de segundo grado,

$$\beta_W t_i^2 + \alpha_W t_i + \left(1 - \frac{R_t}{R_0}\right) = 0 \quad (4)$$

obteniendo que,

$$t_i = \frac{-\alpha_W \pm \sqrt{\alpha_W^2 + 4\beta_W \frac{R_t}{R_0}}}{2\beta_W}, \quad (5)$$

De (5) nos quedaremos con la solución positiva, es decir, la que sale de considerar el signo positivo delante de la raíz. Con el ello, la expresión para el error absoluto de la temperatura nos quedará tal que;

$$\Delta T_i = T_i \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial R_i} [f(R_i, R_0)] \epsilon_{R_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial R_0} [f(R_i, R_0)] \epsilon_{R_0}\right)^2},$$

siendo la función $f = f(R_i, R_0) = \sqrt{\alpha_W^2 + 4\beta_W \frac{R_i}{R_0}}$.

La expresión anterior queda como,

$$\Delta T_i = T_i \sqrt{\frac{4\beta_W^2}{R_0^2 \left(\alpha_W^2 + 4\beta_W \frac{R_i}{R_0}\right)} \epsilon_{R_i}^2 + \frac{4\beta_W^2 R_t^2}{R_0^2 \left(\alpha_W^2 + 4\beta_W \frac{R_i}{R_0}\right)} \epsilon_{R_0}^2} \quad (6)$$

$R (\Omega)$	$T (^{\circ}C)$	$T (K)$	$\Delta T (^{\circ}C)$
0.5444	355.78	628.78	0.05
0.7610	560.61	833.61	0.08
0.9211	705.71	978.71	0.01
1.049	818.17	1091.17	0.01
1.1538	908.21	1181.21	0.02
1.2475	987.21	1260.21	0.02

Table 4: Valores experimentales de la resistencia y la temperaturas, halladas con (5).

Representando $S (V)$ en función de $T^4 (K^4)$ tenemos la siguiente recta experimental.

$S (V)$	$T^4 (K^4)$
0.31	$1.6022346631 \cdot 10^{10}$
1.06	$9.8774163692 \cdot 10^{10}$
2.28	$2.4803 \cdot 10^{11}$
3.60	$4.48099 \cdot 10^{11}$
5.29	$6.8037 \cdot 10^{11}$
7.30	$9.49813 \cdot 10^{11}$

Table 5: Valores experimentales del voltaje de la termopila y la temperatura a la cuarta.

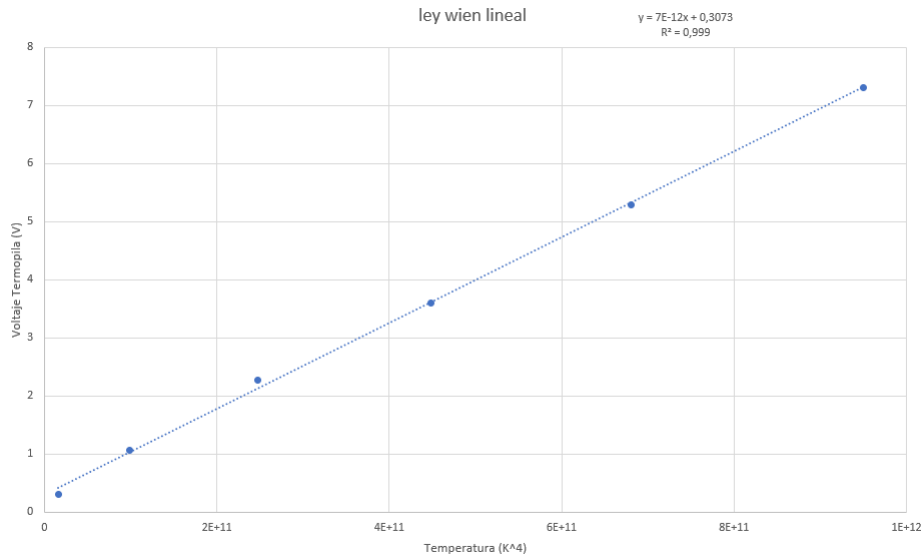


Figura 3: Recta experimental de los datos de la Tabla 5.

Se obtiene una recta experimental tal que,

$$S = (7.37 \cdot 10^{-12}) T^4 + 0.3073.$$

Contemplando los errores de la pendiente dados por Excel tenemos que el valor de la pendiente de la recta es $m = (7.37 \pm 0.11) \cdot 10^{-12} (W/m^2 K^4)$.

Podríamos caer en la tentación de comparar el valor de la pendiente, m , con el de la constante de Stefan-Boltzmann pues, al fin y al cabo, partimos de la Ley de Wien.

Hay que llevar cuidado pues, aunque ya se ha dicho, la señal que medimos en la termopila no es directamente la cantidad de energía que nos llega de la lámpara. La señal S es PROPORCIONAL a u , $S \propto u$.

Esto quiere decir, que sin conocer la constante de proporcionalidad que las relaciona no nos es posible profundizar más con este resultado.

Nos vemos obligados a representar los datos de temperatura, T , y voltaje, S , en escala logarítmica. Así, tendremos que preocuparnos de que la pendiente de la recta que obtengamos, experimentalmente, sea igual a 4,

$$\text{Log}(S) = \text{Log}(Ku) = \text{Log}(K) + \text{Log}(u), \quad (7)$$

con k la constante de proporcionalidad que comentamos.

Como por lo anterior no podemos confirmar formalmente si nuestros datos experimentales se aproximan a lo esperado debemos de intentar buscar otro camino.

Todo esto se debe a la forma en la que hemos orientado la toma de datos pues si hubiéramos medido *DIRECTAMENTE* la densidad de energía **TOTAL** emitida por la lámpara el valor de la pendiente anterior nos daría la constante de Stefan-Boltzmann siendo así posible concluir algo.

El problema, como hemos dicho repetidas veces, viene por la proporcionalidad directa entre el voltaje de la termopila y la densidad de energía emitida,

$$S = Ku,$$

que mirando (7) también se puede escribir como,

$$\text{Log}(S) = \text{Log}(K) + \text{Log}(u),$$

y haciendo uso de la **Ley de Wien**:

$$\text{Log}(u) = 4\text{Log}(T) - \text{Log}(K'). \quad (8)$$

Entonces, podemos representar los logaritmos decimales de los datos de la Tabla 4 y 5 realizando una regresión lineal $S - T$ y así verificar si la pendiente de la recta experimental obtenida se acerca al valor de la teórica, 4.

$\text{Log}(S) \text{ (Log(V))}$	$\text{Log}(T) \text{ (Log(K))}$
-0.509	2.551
0.025	2.749
0.360	2.849
0.556	2.913
0.723	2.958
0.863	2.994

Table 6: Valores experimentales del voltaje de la termopila y la temperatura.

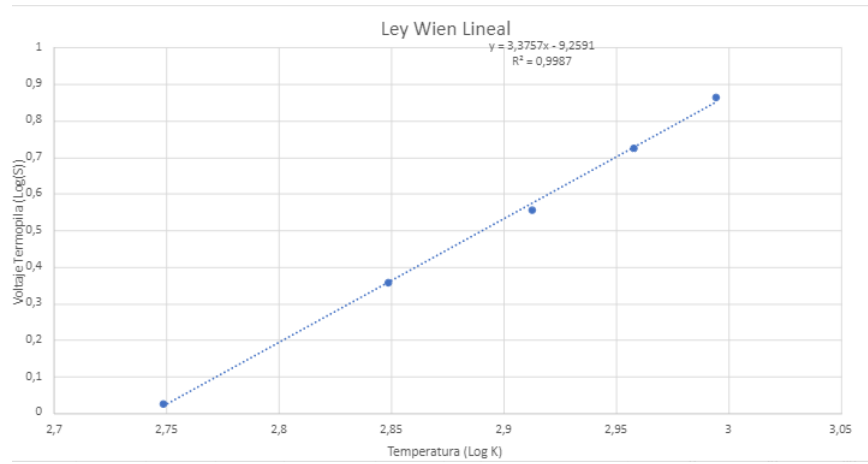


Figura 4: Logaritmo del voltaje, S , frente al logaritmo de la temperatura, T .

Hay que decir que no se ha representado el primer valor de la tabla pues como se observa se desvía respecto de los otros valores. Al representar este punto el coeficiente de linealidad nos sale menor que cuando no lo hacemos.

Este valor no lo quitamos por amor al arte sino que tiene su explicación. La emisión, siendo ya de por sí 'tenue' para valores relativamente altos de temperatura (de las que hemos medido) para el primer valor lo es aún más. La cantidad de energía que llega a la termopila para el primer valor de temperatura lo ignoramos debido a la tenuidad de la energía que la alcanza.

Si colocásemos la mano a 10 *cm* de distancia de la lámpara a dicha temperatura no notaríamos 'calor'. Sin embargo, para valores más altos si que se apreciaba.

Con todo esto, la recta experimental obtenida tras la regresión de los puntos de la Tabla 6 es:

$$\text{Log}(u) = 3.376\text{Log}(T) - 9.259, \quad (9)$$

donde la pendiente presenta un error 0.070. Además el coeficiente de correlación es $R^2 = 0.998$.

Vemos que la pendiente de la recta (9) no es igual a 4, como cabría esperar

teóricamente pero aún así el valor que hemos obtenido, $m = 3.376 \pm 0.070$, no es del todo malo si tenemos en consideración todos los aspectos que hemos despreciado.

3.4 Análisis de los resultados.

Entonces, **¿los resultados empíricos han sido buenos o malos?** pues por el primer camino ni hemos podido concluir y por el segundo hemos obtenido un valor que, a pesar de ser cercano al teórico, sigue teniendo una discrepancia considerable respecto de este, $r = 3.376/4 \approx 0.844$.

Hemos estudiado la emisión de una lámpara de Wolframio considerando a ésta como un cuerpo negro en equilibrio. Esta aproximación no es del todo acertada, además de haber ignorado aspectos importantes.

Por un lado, la termopila ha sido colocada a unos 10 *cm* de la lámpara llegándole a esta una parte del total de energía emitida. La energía que parte de la resistencia se expande en todas direcciones, en un espacio tridimensional y no se dirige toda hacia donde se encontraba el detector.

Con lo que, únicamente medimos una porción de ella. Si quisiéramos cuantificar dicha energía deberíamos tener en cuenta la sección correspondiente. Por otro lado, si por el contrario quisiéramos mejorar nuestras medidas y medir la totalidad de la energía emitida deberíamos conseguir un detector que abarcará toda la lámpara. Esto podría ser meter a la lámpara en el interior de otro objeto que aislará a ésta y pudiera medir la energía, por ejemplo.

En nuestro caso, aún haciendo los cálculos exactos de la energía que atraviesa la sección que nos llega a la termopila deberíamos de averiguar el total de energía emitida volviendo a encontrarnos con que estamos idealizando a la lámpara con un cuerpo negro y ya sabemos que, por pequeños que sean, tendremos errores pues no es del todo un cuerpo negro.

Y, ¿Por qué no se trata de un cuerpo negro?, otra vez:

‡ Un cuerpo negro tiene una emitancia igual a uno y ningún objeto la iguala, es decir, la emitancia de un cuerpo real será menor a la unidad. Los cuerpos que se aproximan al comportamiento del idealizado cuerpo negro se le denomina aproximación a un cuerpo gris.

La lámpara de Wolframio cumple esto, con lo que su emitancia es menor a la unidad.

✿ Según la **Ley de Kirchhoff** en **EQUILIBRIO** térmico la emitancia y la absortancia son iguales.

Aquí suponemos que estamos en equilibrio y que toda la energía absorbida por la resistencia es emitida. Además de ser ésta menor a la unidad no tendremos la igualdad entre la cantidad de energía irradiada con la que se ha absorbido. Esto significa que la temperatura experimental que

obtenemos desfase con la temperatura real que correspondería para la cantidad de energía emitida.

- ⁴ La reflectancia de un cuerpo negro es nula, por eso su absorptancia es la unidad. La cantidad de energía que se refleja en su superficie es nula. En otras palabras sería decir que absorbe toda la radiación.

En la lámpara tenemos una envoltura de cristal, o vidrio, que, evidentemente, refleja la luz. En el laboratorio no nos preocupamos de realizar las medidas en un espacio totalmente oscuro (tampoco creo que hubiéramos podido hacerlo en caso de proponerlo).

Por ello, entre la energía emitida por la lámpara teníamos también ruido, radiación procedente de la reflexión de la luz ambiente. Esa luz proviene de nuestra estrella, el Sol.

Estas son algunas de las razones por las que no hemos obtenido un valor igual a 4 en la pendiente de la recta experimental.

Cuando hicimos la representación de S en función de T^4 aunque hubiéramos conocido la constante de proporcionalidad K nos hubiéramos topado con la misma problemática pues de igual manera no medimos la totalidad de la energía, solo una sección.

Como conclusión general podemos decir que los resultados obtenidos no son malos pues a pesar de todas las variables que hemos despreciado para idealizar la emisión de la lámpara hemos obtenido valores experimentales considerablemente cercanos a los teóricos.

Este experimento se podría haber realizado con muchísima más precisión y en mejores condiciones pero hay que tener en cuenta que tanto mi compañero como yo carecíamos de fundamentos de mecánica estadística, y más aún del cuerpo negro, en el momento en el que la hicimos.

Tras unos meses de clases mis conocimientos en estadística son mayores, haciéndome posible una mejor interpretación del experimento y de los resultados. El haber profundizado en este tema me ha hecho aprender mucho, no solo mecánica estadística, sino también cuántica pudiendo así observar la gran relación existente entre ambas.

Si volviera a repetir el experimento cuidaría mejor las condiciones en las que lo realizaría. Intentaría disminuir al máximo la luz ambiente y buscaría la forma de perder la menor cantidad posible de radiación para que la aproximación a un cuerpo negro fuera lo más acertada posible.

✿ En vez de una termopila buscar algún medidor de radiación en el cuál sea posible introducir por completo el cuerpo a medir. Así se mediría toda la radiación emitida, además eliminaríamos la radiación por reflexión.

✿ Asegurarme de que nos encontramos en equilibrio para que se dé la Ley

de Kirchhoff.

- ✿ En el caso de volver a utilizar una termopila estudiar cómo responde ésta para conocer lo máximo posible la proporcionalidad de la señal dada con la energía emitida.
- ✿ Trabajar con temperaturas más elevadas nos puede reducir los errores pues hemos visto que para las primeras medidas tomadas los datos de S se dispersaban respecto de los valores asociados a temperaturas más altas.

Para concluir, veamos qué ocurre con la energía de un péndulo cuando lo interpretamos igual que los osciladores de la cavidad del cuerpo negro. Es algo muy curioso porque si la hipótesis de Planck es cierta un péndulo variaría su energía en saltos discretos.

4 Movimiento de un péndulo.

Imaginemos el movimiento de un péndulo. En él cuelga una masa $m = 0.05 \text{ kg}$ sostenida por una cuerda de longitud $l = 0.1 \text{ m}$. Cogemos la masa y la sostenemos con un ángulo $\theta = 0.2 \text{ rad}$, respecto de la vertical y lo dejamos oscilar siendo este sometido a una fuerza de arrastre debida a la fricción con el aire. Con lo que, el péndulo irá perdiendo energía a medida que realiza oscilaciones. El sistema comenzará con una energía inicial E_p que evidentemente irá disminuyendo con el tiempo de forma continua hasta que llegar al valor de cero, ¿no?

Según Planck esto no es así pues él postuló lo siguiente:

Cualquier ente físico con un grado de libertad, cuya 'coordenada' es una función senoidal del tiempo sólo puede poseer energías totales ϵ , que satisfacen la relación

$$\epsilon = nh\nu; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde ν es la frecuencia de la oscilación y h es una constante universal.

Estudiemos el problema para llegar a conclusiones.

La frecuencia de oscilación del péndulo la podemos escribir como

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10 \text{ m/s}^2}{0.1 \text{ m}}} = 1.592/\text{seg}.$$

Por otro lado, la energía máxima/inicial es igual a la energía potencial máxima que alcanza en el momento en el que disponemos la masa a con un ángulo θ respecto de la vertical

$$E_p = mgh = mgl(1 - \cos\theta) = (0.05 \text{ Kg}) \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m} \cdot (1 - \cos(0.2)) = 3.05 \cdot 10^{-7} \text{ julios}.$$

Como por las ideas de Planck estamos suponiendo que la energía del péndulo es discreta las variaciones de energía debidas al rozamiento se darán en saltos de ΔE ,

$$\Delta E = h\nu = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ julios} \cdot \text{seg} \cdot 1.592 / \text{seg} = 1.058 \cdot 10^{-33} \text{ julios}.$$

Por tanto, $\frac{\Delta E}{E_p} = 3.469 \cdot 10^{-27}$. Por lo que si quisiéramos verificar el postulado de Planck con un péndulo deberíamos de medir con una precisión del orden de 10^{-27} . Esto es algo bastante complicado de conseguir puesto que alcanzar esa precisión es una locura. Ojalá fuéramos capaces de construir aparatos de medida con esa precisión.

Si alguien intenta verificar el postulado de Planck con un péndulo ordinario le será imposible llegar a alguna conclusión. A lo suma concluirá que no le es posible concluir nada, valga la redundancia.

La pequeñez de la constante h es la principal culpable de esto pues la granularidad de la energía es tan fina que es imposible distinguirla de un continuo de energías. Solo en sistemas con una ν muy grande o bien, una E lo suficiente pequeña, como para que $\Delta E = h\nu$ sea del orden de E estaremos en condiciones de verificar el postulado de Planck. Esto se da en la radiación de ondas estacionarias de alta frecuencia del cuerpo negro.

5 Referencias

- Apuntes del curso de Mecánica estadística del tercer curso del Grado en Física de la Universidad de Alicante en el año 2021.
- Indicaciones de la profesora responsable de la asignatura de Técnicas Experimentales II del tercer curso en el Grado en Física de la Universidad de Alicante, MARIA ANGELES DIAZ GARCIA.