PRÁCTICA 2 CUÁNTICA

Ruiz Muñoz, Juan Manuel

16 enero del 2022

1 EJERCICIO 1

Prepararemos un estado cuántico de un qbit en el estado $|0\rangle$, inicialmente. Éste estado se hará pasar por un circuito constituido por tres puertas, dos de ellas serán Hadamard y la otra $R_z(\lambda)$. Con esto queremos que la probabilidad de medir en el estado final sea tal que $\langle\psi|0\rangle^2 = 0.608$. Haremos uso de la notación de Dirac.

Desarrollemos teóricamente todo:

$$|\psi\rangle = HR_z\left(\lambda\right)H\left|0\right\rangle \tag{1}$$

$$|\psi\rangle = \frac{e^{-i\frac{\lambda}{2}}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\lambda}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \tag{2}$$

pues las puertas se definen como $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ y $R_z\left(\lambda\right) = e^{\frac{-i\lambda}{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\lambda}\end{bmatrix}$. Además, consideramos que trabajamos en la base $B = \{|0\rangle\,;|1\rangle\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$.

La expresión (2) se puede reescribir como $|\psi\rangle = \frac{e^{\frac{-i\lambda}{2}}}{2}\begin{bmatrix}1+e^{i\lambda}\\ 1-e^{i\lambda}\end{bmatrix}$. Ahora podemos proyectar el estado $|0\rangle$ sobre la conjugada de $|\psi\rangle$. Entonces, tenemos;

$$\langle\psi|0\rangle = \frac{e^{\frac{i\lambda}{2}}}{2}\begin{bmatrix}1+e^{-i\lambda} & 1-e^{-i\lambda}\end{bmatrix}.$$

Sabiendo que la probabilidad viene dada por el cuadrado de la proyección anterior,

$$\langle\psi|0\rangle^2 = \left[\frac{e^{\frac{i\lambda}{2}}}{2}\left(1+e^{-i\lambda}\right)\right]^2 = 0.608 \tag{3}$$

entonces, el problema se nos reduce a resolver la siguiente relación:

$$e^{\frac{i\lambda}{2}} + e^{\frac{-i\lambda}{2}} = 1.5595,$$

que expresando en forma trigonométrica y manejándola con un poco de álgebra llegamos a:

$$\boxed{\lambda = 2arcos\left(0.7797\right) \approx 1.353 \text{ radianes.}}$$

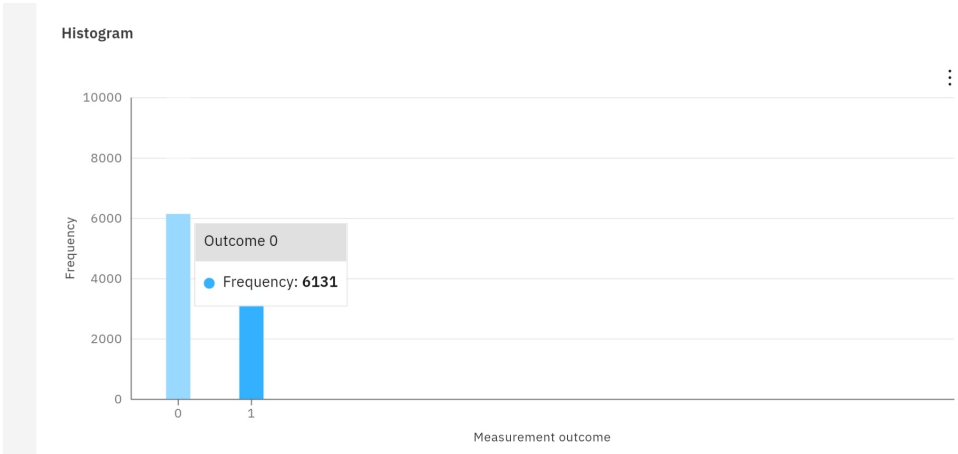

Figura 1: Histograma de probabilidad para el sistema del ejercicio 1, simulado.

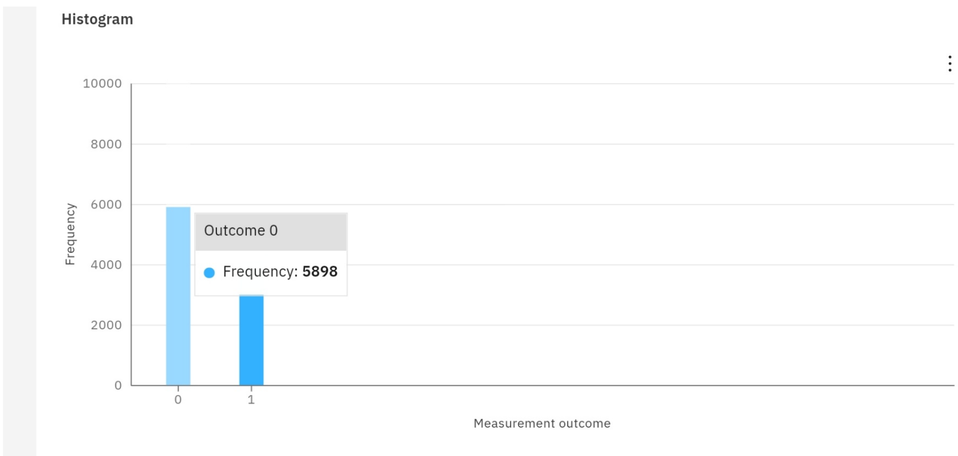

Figura 2: Histograma de probabilidad para el sistema del ejercicio 1, en un ordenador cuántico.

Observamos en ambos histogramas que no tenemos un valor de frecuencia exactamente igual al esperado teóricamente, pues en principio deberíamos de obtener 0.608 estados $|0\rangle$ por cada vez que se mide. Como las simulaciones se realizan con 10.000 repeticiones se esperaría, teóricamente, que obtuviéramos 6080 estados 0 y $(10000 - 6080)$ estados 1.

Esto no lo observamos en las figuras presentadas. Vemos que los valores de estados 0 son, en la figura 1, mayores que los teóricos y menores, en la figura 2. **¿Se debe esto a un error y debemos de repetirlo?** NO, no sería necesario repetir nada pues los errores que observamos tienen un fundamento tanto estadístico como físico.

En la figura 1, que se corresponde a la simulación el error se debe a un carácter estadístico. Dicho error es algo intrínseco de la estadística y siempre debemos de lidiar con él pues la naturaleza no es tan perfecta como las matemáticas. Sin embargo, se puede intentar minimizar el error con un aumento del número de repeticiones pues este depende inversamente del número de veces que se repita el experimento.

El error de la figura 2 ya no se debe solo al estadístico, sino al propio hecho de medir. Cuando la computadora intenta determinar el estado en ocasiones mide mal determinando el estado contrario al real. Esto se debe a la forma en la que hacemos la medición pues en ciertas regiones se solapan los estados energéticos. No entraré en más cosas para no alargarme, llevo ya 2 páginas.

2 EJERCICIO 2

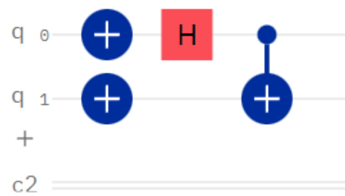

Figura 3: Circuito que da $|\psi_4\rangle$.

Definamos el estado del primer qbit ($q[0]$) como $|\psi\rangle_A = CNOTHX\,|0\rangle_A$ y el del segundo ($q[1]$) tal que $|\psi\rangle_B = X\,|0\rangle_B$. Lo único que hemos hecho es traducir lo que observamos en la figura 3.

Desarrollando lo anterior considerando las puertas correspondientes se llega a:

$$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A - |1\rangle_A\right) \tag{4}$$

$$|\psi\rangle_B = |1\rangle_B\,, \tag{5}$$

y realizando el producto tensorial entre ambas funciones de onda obtenemos el resultante:

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes_{CNOT} |\psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right), \tag{6}$$

donde se cambia el estado $|1\rangle_B$ a $|0\rangle_B$ en $|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$ por la presencia de la puerta CNOT. Este estado presenta entrelazamiento pues no se puede expresar como producto tensorial del estado A y el estado B, y es que ambos qbits interaccionan entre sí debido a la puerta CNOT.

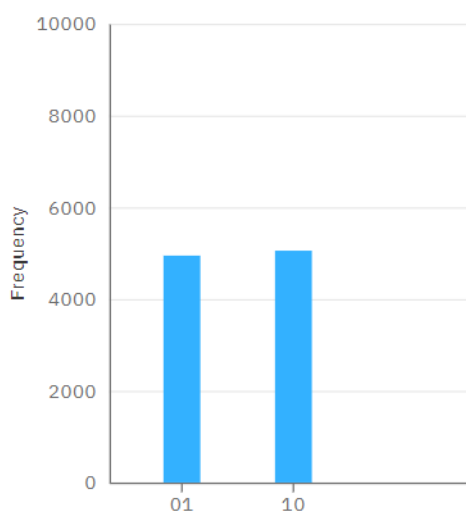

Figura 4: Simulación del circuito 3.

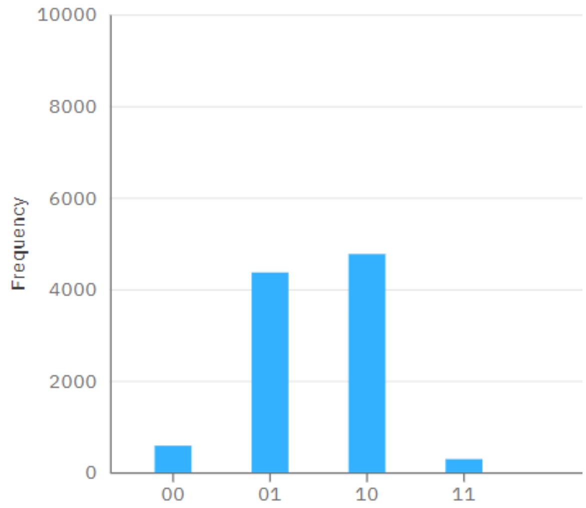

Figura 5: Computación cuántica del circuito 3.

En ambas vemos que se reparte de forma equiprobable, más o menos, entre dos de los cuatro estados posibles. La desviación de la equiprobabilidad teórica se debe a errores estadísticos y computacionales. En la figura 4 se debe a errores estadísticos por eso no encontramos que en ninguna medición se mida $|00\rangle$ ni $|11\rangle$ puesto que estadísticamente estos dos tienen probabilidad nula. Sin embargo, como bien se observa en la Figura 5, tenemos que ciertas mediciones caen en los estados que en principio no son accesibles con las condiciones que imponemos. Esto se debe a que a la hora de medir también se cometen errores, midiendo estados erróneos.

En la figura 5 tenemos que el circuito se ha realizado en un ordenador cuántico y nos he posible observar que en los estados $|00\rangle$ y $|11\rangle$ ya tenemos mediciones. Esto se debe a errores de medición, como comentamos en el ejercicio 1.

Comentar también, otros errores, que se mencionan en el guión. Se puede dar el caso de que nuestros qbits se vean alterados entre sí, debido a que estos se vean aplicados a puertas. Hacer pasar un qbit[0] a través de una puerta Hadamard puede provocar modificaciones en el estado del qbit[1]. Este error hay que tenerlo en cuenta puesto que en este caso el sistema presenta entrelazamiento debido a la puerta CNOT.

La relajación del sistema también se puede dar si excitamos a un estado excitado, valga la redundancia. El preparar un qbit en un estado superior nos supone estar limitados en un tiempo, t, puesto que el sistema podría relajarse a su estado fundamental, siendo así diferente las condiciones que marcamos.